Р.М.Тимербаев, Ф.Ә.Шәмсетдинов,
Л.Г.Әхмәтов

МАТЕРИАЛЛАР КАРШЫЛЫГЫ

«МӘГАРИФ – ВАКЫТ» НӘШРИЯТЫ

Р.М. ТИМЕРБАЕВ, Ф.Ә. ШӘМСЕТДИНОВ, Л.Г. ӘХМӘТОВ

МАТЕРИАЛЛАР КАРШЫЛЫГЫ

Югары һәм урта махсус уку йортлары өчен уку ярдәмлеге

Татарстан Республикасы Мәгариф һәм фән министрлыгы тарафыннан югары һәм урта махсус уку йортларының инженерлык белгечлеге буенча укучы студентларга тәкъдим ителә

КАЗАН · «МӘГАРИФ — ВАКЫТ» НӘШРИЯТЫ · 2016

УДК 539.2/.6(075.8)
ББК 30.121 я73
Т45

Китап 2014—2020 елларга Татарстан Республикасы дәүләт телләрен һәм Татарстан Республикасында башка телләрне саклау, өйрәнү һәм үстерү буенча Татарстан Республикасы дәүләт программасын үтәү максатында нәшер ителә.

Рецензентлары:

физика-математика фәннәре докторы, профессор
М. Н. Сираҗетдинов;
педагогия фәннәре кандидаты, доцент
З. А. Латыйпов

Тимербаев, Р.М.

Т45 Материаллар каршылыгы / Тимербаев Р.М., Шәмсетдинов Ф.Ә., Әхмәтов Л.Г. — Казан: Мәгариф — Вакыт, 2016.— 147 б.: рәс. б-н.

ISBN 978-5-906894-24-3

Әлеге уку әсбабы югары һәм урта махсус уку йортларында техник белгечлек буенча татар телендә белем алучы студентларга гамәли механиканың материаллар каршылыгы бүлеген үзләштерүдә ярдәм итү максатында тәкъдим ителә.

Бу китаптан вуз укытучылары, аспирантлар да файдалана ала.

УДК 539.2/.6(075.8)
ББК 30.121 я73

ISBN 978-5-906894-24-3

© «Мәгариф — Вакыт» нәшрияты, 2016
© Тимербаев Р.М., Шәмсетдинов Ф.Ә., Әхмәтов Л.Г., 2016

КЕРЕШ

Гомуми механиканың беренче бүлеге — теоретик механика, ул гамәли механиканың, шуның белән бергә материаллар каршылыгының нигезе булып тора. Теоретик механикада җисемнең тигезләнеш халәте һәм хәрәкәт законнары өйрәнелә. Гамәли механика да шундый ук мәсьәләләр белән шөгыльләнә. Ләкин теоретик механиканың өйрәнү объекты абсолют каты җисем булса, гамәли механикада ул реаль каты (деформацияләнә торган) җисем була. Абсолют каты җисемнең теләсә кайсы ике нокта арасы һәрвакыт даими булса, реаль каты җисемдә ул көчләр тәэсиреннән үзгәрә. Шулай итеп, материаллар каршылыгы теоретик механикага нигезләнсә дә, бу ике фәннең принципиаль аермасы бар. Материаллар каршылыгы курсы материалларның ышанычлылыгы турындагы фәнгә керә, ул теория һәм экспериментлар нигезенә таяна.

Материаллар каршылыгы фәне конструкциянең ныклыгын, катылыгын, тотрыклылыгын һәм шул ук вакытта экономиялелек һәм озак хезмәт итү шартын исәпләү мәсьәләләрен үз эченә ала. *Ныклык* ул — җисемнең үзенә юнәлгән йөкләнешкә җимерелмичә каршы тору сәләте. *Катылык* — йөкләнешкә дучар булган җисемнең деформацияләргә каршы тору сәләте. *Тотрыклылык* — җисемнең үзенең элеккеге тигезләнеш халәтен саклап кала алу сәләте.

Ышанычлылыкның шартлары булып конструкциянең ныклыгы, катылыгы, тотрыклылыгы һәм озак хезмәт итүе тора.

Экономиялелек күп очракта детальләрне ясау өчен киткән материалга бәйле.

Бу китапның төп максаты югары һәм урта махсус уку йортларында техник белгечлек буенча татар телендә укучы студентларга материаллар каршылыгы курсын үзләштерүдә ярдәм итү булды.

Тәкъдим ителә торган уку әсбабын яхшыртуга ярдәм итүләре өчен: физика-математика фәннәре докторы, профессор Ә.С. Сибгатуллинга, «Мәгариф — Вакыт» нәшрияты хезмәткәрләренә, шулай ук кулъязманы укып үзләренең киңәшләрен биргән татар филология белгечләре профессор Ф.Г. Галлямовка һәм профессор Н.Х. Лаисовка зур рәхмәтебезне белдерәбез.

Авторлар

1. Реаль объект һәм аның исәпләү схемасы

Каты җисемнең барлык механик үзлекләрен, төгәл геометрик зурлыкларын һ.б.ны исәпкә алганда, конструкцияләрне, күптөрле катлаулы мәсьәләләр чыгарга мөмкин булуы нәтиҗәсендә, исәпләргә мөмкин түгел. Шуңа күрә, мәсьәләне чишәр алдыннан, соңгы нәтиҗәгә кагылмый торган иярчен факторларны игътибарга алмаска кирәк.

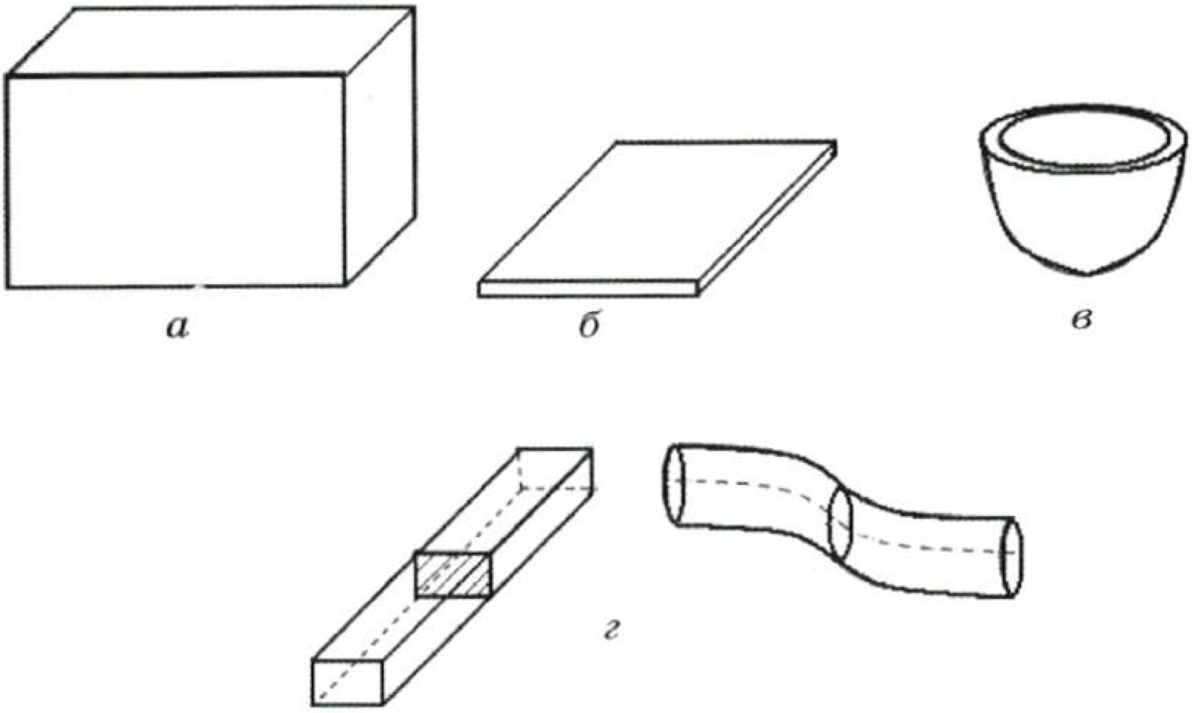
Конструкциянең тәртибен анализлау өчен, аның ышанычлылыкка тәэсир итүче төп үзлекләрен исәпкә алып, идеальләштерелгән моделен (исәпләү схемасын) кулланалар.

Мәсьәләнең *исәпләү схемасы* дип, йөкләнеш тәэсир иткәндә конструкция яки аның элементларының тәртибен билгеләүче гадиләштерелгән (идеальләштерелгән) схема атала.

Исәпләү схемасын сайлау бик катлаулы һәм җаваплы адым булып тора, аңа исәпләүнең төгәллелеге бәйле.

Мәсьәләне ялгыш сайланган исәпләү схемасы буенча иң төгәл методлар кулланып чишкәндә дә җавап дөрес булмый.

Теләсә нинди конструкцияне түбәндәге элементларга бүлеп була (рәс. 1):



Рәс. 1

а) җисемнең өч төп үлчәме дә бер чамада булса, ул *массив җисем* дип атала;

б) әгәр җисемнең бер төп үлчәме калган ике төп үлчәменә караганда күпкә кечерәк булса, ул *пластина* дип атала;

в) тышча (сүре) бөгелгән пластина формасында була;

г) җисемнең өч үлчәменең берсе, башка икесенә караганда күпкә зуррак булса, ул җисем *стержень (борыс, таяк)* дип атала. Стерженьның геометриясе аның *күчәре* (үзәк сызыгы) һәм *аркылы киселе* белән бирелә. Стерженьның күчәре дә, аркылы киселе дә төрлечә булырга мөмкин (туры яки төрлечә кәкре сызыклы күчәр). Стерженьның төрле исемнәре бар: бөтерелә торган туры стержень – *вал*, бөгелә торган туры стержень — *балка*, кысыла торган туры стержень *багана (колонна)* дип атала.

Чынбарлыкта конструкция элементлары бер-берсе белән нинди дә булса бәйләнештә булалар. Ул төп *бәйләнешләр (ирекле таяну, хәрәкәтле һәм хәрәкәтсез шарнирлы таяну, нык беркетү)* теоретик механика курсында карала.

1.1. Төп төшенчәләр һәм гипотезалар

Деформация — тышкы көчләр тәэсирендә җисемнең төрле өлешләренең урнашу тәртибенең үзгәрүе нәтиҗәсендә зурлыкларының һәм формасының үзгәрүе ул.

Әгәр тышкы көчләр тәэсиреннән деформацияләнгән җисем, йөкләнеш яңадан юкка чыккач, үзенең формасын һәм зурлыкларын

тулысынча кире кайтарса, ул *эластик җисем* дип атала. Җисемнең бу үзлеге *эластиклык* дип атала.

Йөкләнеш юкка чыкканнан соң, җисемнең кире үз халәтенә кайткан өлеше *эластик деформация өлеше* дип, ә калган өлеше *калдык деформация өлеше* дип атала. Калдык деформация өлеше пластиклык һәм эластиклык үзлекләренә бәйле.

Әгәр материалларның механик үзлекләре барлык юнәлешләр буенча да бертөрле булса, аларны *изотропик* дип атыйлар (мәсәлән, пыяла, металлар). Әгәр дә материалның механик үзлекләре төрле юнәлешләрдә төрлечә булса, ул *анизотропик* дип атала (мәсәлән, агач).

Материаллар каршылыгы түбәндәге гипотезаларга таяна:

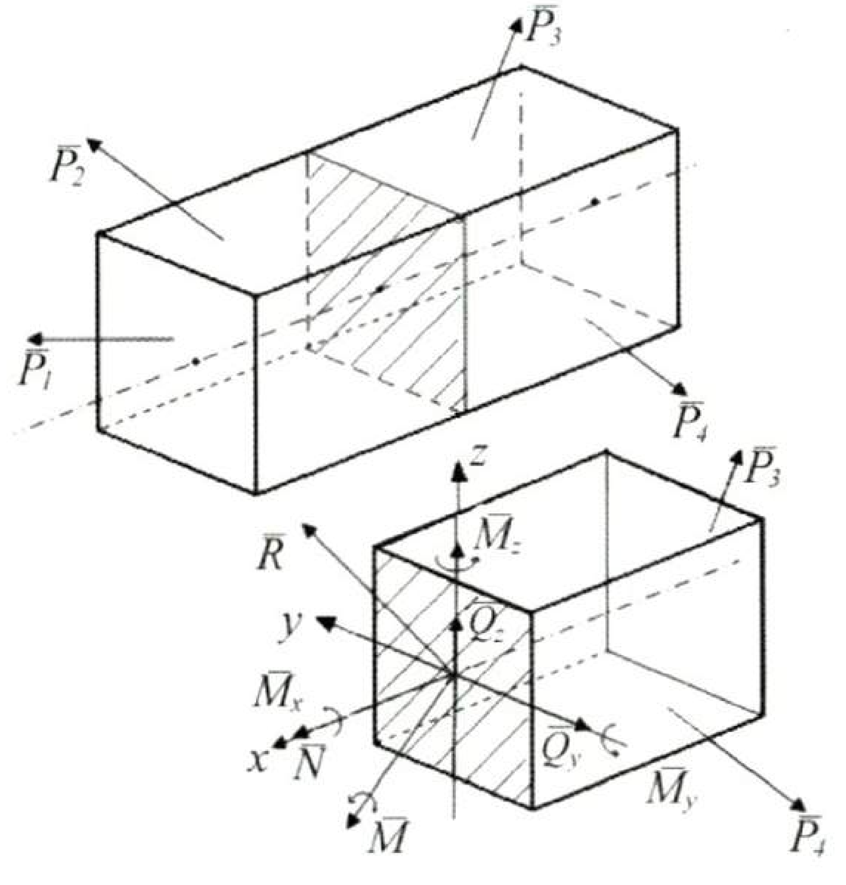
1. *Тоташлылык гипотезасы.* Җисемнең бик кечкенә өлеше дә тоташ матдә белән тутырылган дип санала. Бу гипотеза безгә дифференциаль һәм интеграль исәпләү аппаратларын куллану мөмкинлеген бирә. Җисемнең атом төзелеше исәпкә алынмый.
2. *Чиксез сыгылмалылык (идеаль эластиклык) гипотезасы.* Җисемнең материалы *идеаль сыгылмалы* дип исәпләнә.
3. *Кече деформацияләрнең гипотезасы.* Абсолют деформацияләр — җисемнең үлчәмнәренә карата, ә чагыштырма деформацияләр «бер» саны белән чагыштырганда бик кечкенә дип исәпләнә. Бу гипотеза безгә абсолют каты җисемнең тигезләнеш яки хәрәкәт законнарын куллану мөмкинлеген ача. Кече деформацияләрнең гипотезасы безгә бик күп очракларда исәпләүне гадиләштерергә мөмкинлек бирә. Мәсәлән, бер

аңлатмага деформациянең беренче, икенче һәм тагын да югарырак дәрәҗәле кушылучылары керсә, беренче дәрәҗәле кушылучыларны гына калдырып, аңлатманы кыскарта алабыз.

4. *Деформация тышкы көчләргә пропорциональ (Гук законы).*
5. *Көчләрнең тәэсир итү бәйсезлеге принцибы (суперпозиция принцибы).*

Берничә көчнең бер үк вакытта тәэсир итүе нәтиҗәсе — бу көчләрнең һәрберсенең тәэсир итүе нәтиҗәләре суммасына тигез.

Башка гипотезаларны алга таба карап үтәрбез.



Рәс. 2

Гадәттә стержень нинди дә булса үзара буй көчләр системасы белән йөкләнгән. Шушы көчләр зурайганда, стерженьның җимерелү моменты җитә.

Бу җимерелү стерженьның кайбер урыннарында молекулаларның тәэсир итешү көченнән зуррак дәрәҗәдәге көч килеп чыкканда барлыкка килә.

Димәк, стерженьга тышкы көчләр тәэсир итүеннән эчке өстәмә көчләр барлыкка килә, шул көчләр җимерелүгә сәбәпче була да инде. Аларны билгеләр өчен *кисем методы* кулланыла.

2.1. Кисем методы

1. Җисемне яссылык белән ике өлешкә кисеп бүленгән дип фараз итик (рәс. 2).
2. Киселгән җисемнең бер өлеше алып ташланган дип күз алдына китерик.
3. Калган өлешкә алып ташланган өлештән тәэсир иткән көчләрне кисем яссылыгының авырлык үзәгенә китерәбез. Калган өлешкә тәэсир иткән бу көчләр урынына эчке көчләрнең төп векторы $\vec{R}$, төп момент $\vec{M}$ ларны карарга була.

$\vec{R}$ һәм $\vec{M}$ векторларын *x, y, z* күчәрләренә проекцияләсәк, $\vec{R}$ көче һәм төп момент $\vec{M}$ компонентлары табыла: $\vec{R}\{R_x, R_y, R_z\}$, $\vec{M}\{M_x, M_y, M_z\}$, M_x, M_y, M_z, R_x, R_y, R_z — эчке көч факторлары кыскача *эчке көчләр* дип атала.

2 нче рәсемнән күренгәнчә, R_x стерженьның буйлы деформациясенә сәбәпче (сузылу яки кысылу); Q_y һәм Q_z — аркылы яссылыкны y һәм z күчәрләре буенча күчерәләр; M_x — стерженьны бөтерә, M_y һәм M_z көчләре xz, xy яссылыкларында стерженьны бөгәләр. Шуңа күрә эчке көчләр өчен түбәндәге исемнәр кулланыла: $R_x = N$ — *буй* (нормаль) көч; $R_y = Q_y$ һәм $R_z = Q_z$ — *аркылы көчләр*; $M_x = M_б$ — *бөтерүче момент*; һәм M_y , M_z — *бөгүче моментлар*.

Димәк, без конструкция элементлары дучар булган дүрт төп деформация төрен күрәбез. Практикада эчке көчләрне хисаплау өчен шуны истә тотарга кирәк: N ул — стерженьның калган өлешенә тәэсир иткән барлык тышкы көчләрнең x күчәренә проекцияләренең алгебраик суммасына тигез; Q_y — y күчәренә, Q_z — z күчәренә; $M_б$ — стерженьның исәпләү өлешенә тәэсир иткән барлык тышкы көчләрнең x күчәренә карата моментларының алгебраик суммасына тигез; M_y — y күчәренә карата; M_z — z күчәренә карата.

Эчке көчләрне исәпләгән очракта, теоретик механиканың барлык методлары бары тик бер җисемнең кисеп бүленгән бер өлешенә тәэсир иткән көчләр системасы өчен генә кулланылалар.

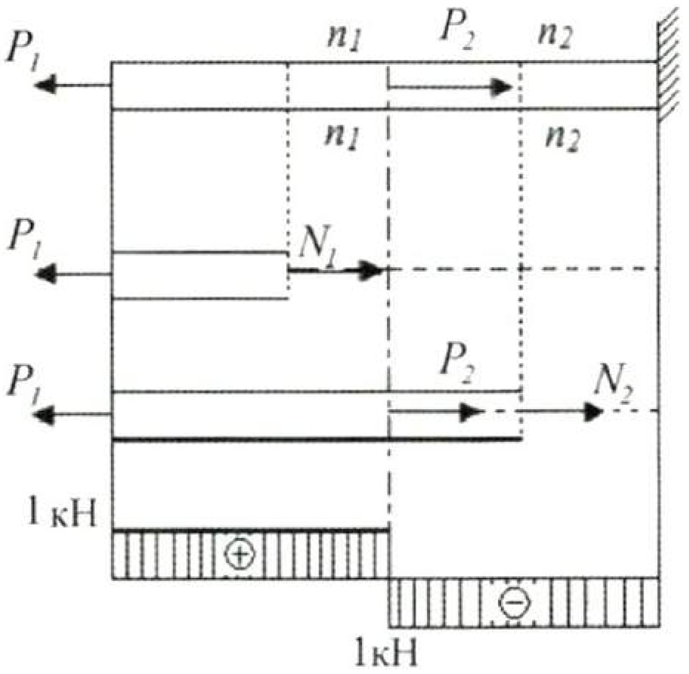
2.2. Эчке көч эпюралары

Бер үк стерженьның төрле кисемнәрендә эчке көчләр һәм моментлар төрле зурлыкларга ия булырга мөмкин. Стерженьның күчәре буенча эчке көчләр һәм моментлар үзгәрүен күрсәткән

графиклар *эчке көч эпюралары* дип атала. Алты көч факторларының (N, Q_y, Q_z, $M_б$, M_y, M_z) һәрберсе өчен аерым бер эпюра төзелгән очракта түбәндәге кагыйдәләрне үтәргә кирәк:

1. Эпюраның базасы (нуль сызыгы) стерженьның күчәренә параллель булырга тиеш.
2. Һәрбер эпюраның ординатасы шул стерженьның кисемендә тәэсир иткән эчке көчне һәм аның зурлыгын күрсәтә. Эпюраның ординаталарын эпюраның күчәренә перпендикуляр урнаштыралар.
3. Эпюралар ординатаны күрсәтү юнәлешендә штрихланалар.
4. Эпюра масштаб буенча төзелә, эпюраларда характерлы ординаталарның зурлыгын күрсәтә торган саннар куеп чыгыла. Аның мәйданында әйләнә эченә эчке көчләр тамгасы куела (уңай яки тискәре).
5. Эпюраларны төзегәндә тигезләмәләр стерженьның һәрбер бүлемтеге өчен кисем методын һәм статика тигезләмәләрен кулланып языла. Бүлемтек чикләре: стерженьның очлары; терәк урыннары; тупланган тышкы көчләр; моментлар куелган урыннар; бер тигезләмә белән бирелгән тышкы

2.3. Буй көч эпюралары



Рәс. 3

Буй көч N нинди дә булса стерженьның кисемендә, кисемнең теләсә кайсы бер ягы буйлап куелган көчләр проекцияләренең алгебраик суммасына тигез. Көчләрнең проекцияләр суммасын исәпләгәндә, кисемнән читкә юнәлгән көч «+» тамгасы белән, ә кисемгә таба юнәлгәне, «–» тамгасы белән алына.

М и с а л. P_1 = 1кН, P_2 = 2кН булганда, стержень өчен N эпюрасын төзергә.

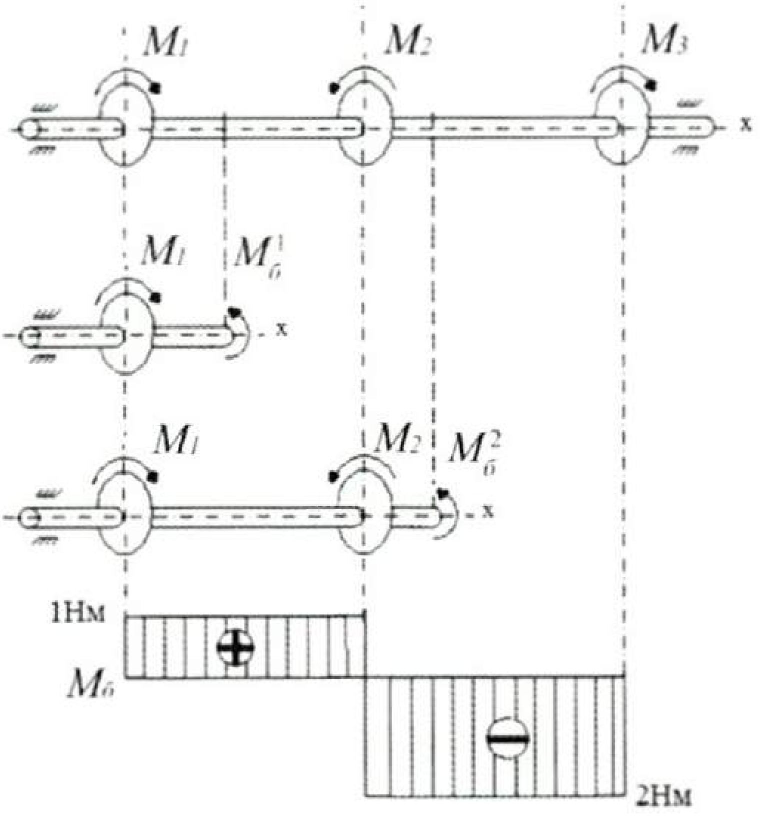
Эпюраның базасын ике бүлемтеккә бүләбез. Аннан соң беренче бүлемтекне карыйбыз. Беренче бүлемтектә n_1n_1 кисемен үткәрәбез һәм киселгән стерженьның бер өлешен (уң як өлешен) алып ташлыйбыз. Калган өлешкә тәэсир иткән көчләрне стерженьның күчәренә проекциялибез һәм тигезләнеш халәте тигезләмәсен төзибез.

Моннан $N_1 = P_1$=1кН килеп чыга, һәм билгеле булган масштаб буенча беренче бүлемтектә эпюраны төзибез.

Шундый ук юл белән $N_2 = P_1 - P_2 = -1$кН килеп чыга. Икенче бүлемтектәге буй көч эпюрасын төзибез.

Тулы эпюра 3 нче рәсемдә күрсәтелгән.

2.4. Бөтерү моменты эпюралары



Рәс. 4

Нинди дә булса стерженьның кисемендә бөтерү моменты $M_б$ кисемнең теләсә кайсы бер ягы буйлап куелган моментларның алгебраик суммасына тигез. Моментның суммасын исәпләгәндә, шуны истә тотарга кирәк: стерженьга кисем ягыннан караганда, аны сәгать теле йөреше юнәлешенә борырга омтылган моментны уңай дип саныйбыз.

М и с а л. M_1 = 1Нм, M_2 = 3Нм, M_3 = 2Нм булганда, бөтерү моменты $M_б$ эпюрасын төзергә (рәс. 4).

Эпюраның базасын ике бүлемтеккә бүләбез . Аннан соң беренче бүлемтекне карыйбыз. Беренче бүлемтектә кисем үткәрәбез һәм киселгән валның бер өлешен (уң як өлешен) алып ташлыйбыз. Беренче бүлемтектәге бөтерү моментын табабыз: $M_б^1 = M_1 = 1$ Нм һәм билгеле булган масштаб буенча беренче бүлемтектә аның эпюрасын төзибез.

Шундый ук юл белән $M_б^2 = M_1 - M_2 = -2$ Нм килеп чыга. Икенче бүлемтектәге буй көч эпюрасын төзибез.

Бөтерү моментларының тулы эпюрасы 4 нче рәсемдә күрсәтелгән.

2.5. Аркылы көчләрнең һәм бөгү моментларының эпюралары

Бирелгән кисемдә (рәс. 4) аркылы көч Q вертикаль күчәргә төшүче барлык тышкы көчләр проекцияләренең алгебраик суммасына тигез.

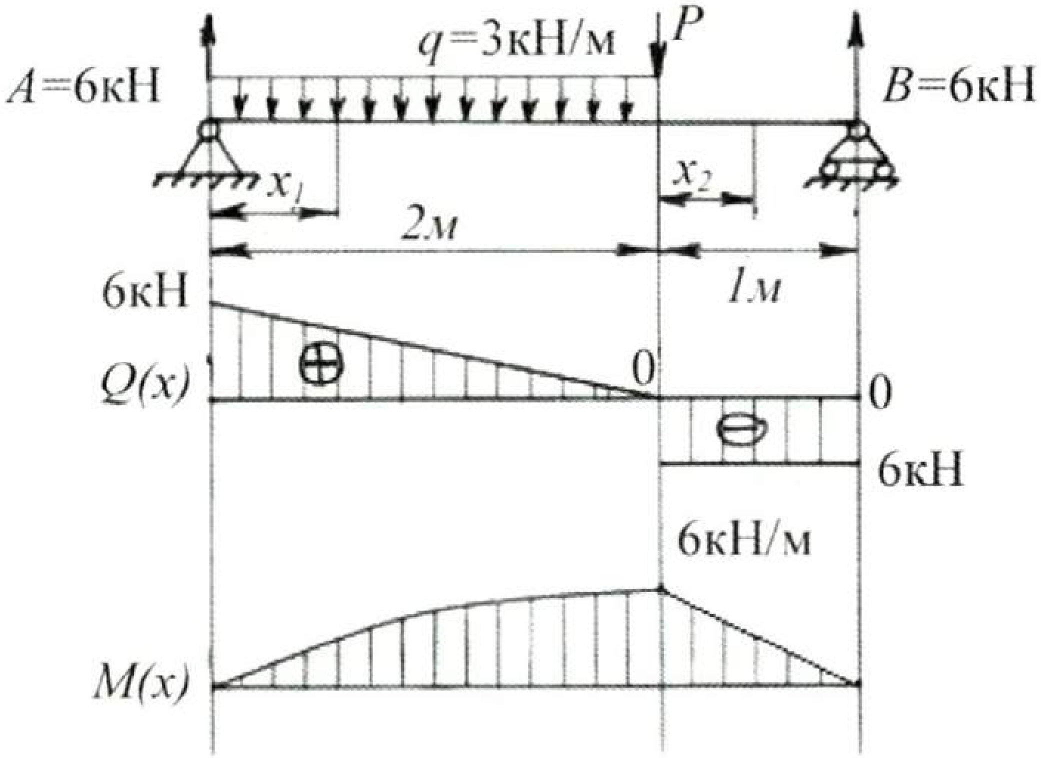
Проекцияләрнең суммасын исәпләгәндә, көчләр моменты кисемгә карата сәгать теле йөреше уңаена юнәлгән булса, проекцияләр кушу тамгасы белән алына, һәм, киресенчә, сәгать теле йөрешенә каршы юнәлгән булса, алу тамгасы белән алына.

Бирелгән аркылы кисемдәге бөгү моменты M шул балканың калган өлешенә тәэсир итүче тышкы көчләрнең кисемгә карата моментларының суммасына тигез. Туры балкалар өчен шушы кагыйдәне кулланып була: өскә таба юнәлгән көч моменты кушу

тамгасы белән алына, аска таба юнәлгән көч моменты алу тамгасы белән алына.

М и с а л. Q һәм M эпюраларын төзергә (рәс. 5).

Эпюраларны төзер алдыннан терәкләрнең реакцияләрен исәпләргә кирәк. Моның өчен көчләрнең статик тигезләнеш тигезләмәләрен төзеп чишәбез: $A = B = 6$кН була. Эпюраның базасын бүлемтекләргә бүләбез. Аннан соң һәр бүлемтекнең кисемнәрендә аркылы көчләрне һәм бөгү моментларын табабыз.



Рәс. 5

1 н ч е б ү л е м т е к: $0 \le x_1 \le 2$ м.

Аркылы көч $Q(x_1) = A - qx_1 = 6 - 3x_1$ — бу туры сызык тигезләмәсе.

Бөгү моменты $M(x_1 = Ax_1 - qx_1\frac{x_1}{2} = 6x_1 - \frac{3}{2}x_1^2$ — бу парабола тигезләмәсе.

Аны беренче бүлемтектә сурәтлибез (5нче рәс.). Шундый ук юл белән икенче бүлемтекне карыйбыз.

2 нче бүлемтек: $0 \le x_1 \le 1\,м$.

Аркылы көч $Q(x_2) = A - 2q - P = -6$кН, икенче бүлемтек өчен ул бертөрле (const) була. Аны сызымда сурәтлибез.

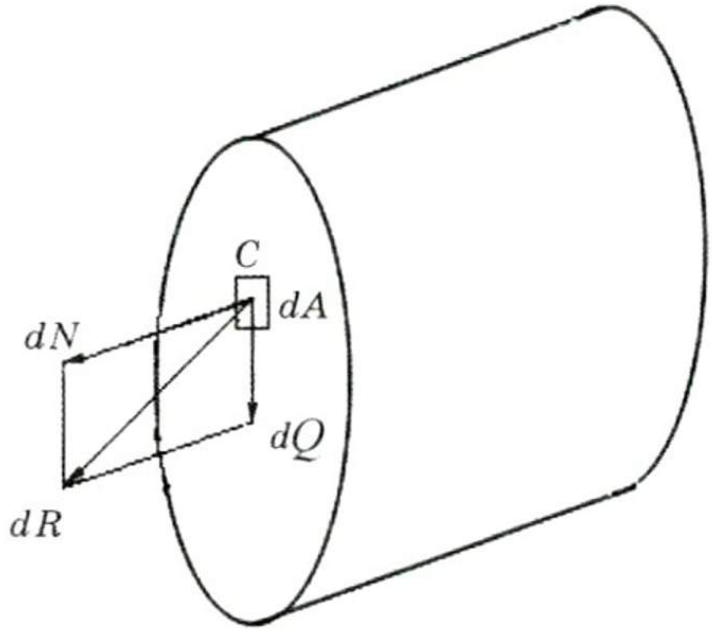
Бөгү моменты $M(x_2) = A(2+x_2) - 2q(1+x_2) - Px_2 = 6-6x_2$. Бу туры сызык тигезләмәсе, ул 5нче рәсемдә сурәтләнгән.

Шулай итеп, без 5нче рәсемдә аркылы көчләрнең һәм бөгү моментларының эпюраларын төзедек.

3. Кисемдәге көчәнешләр. Деформацияләр

3.1. Көчәнешләр

Эпюраларны төзегәндә табылган эчке көчләр тикшерелә торган кисемгә тулаем тәэсир итәләр. Шул кисемнең кайбер нокталарында барлыкка килгән эчке көчләр конструкциянең ныклыгын билгелиләр. Аларны исәпләү өчен, аркылы кисемдәге C ноктасы тирәсендә dA мәйданчыгын билгелибез (рәс. 6).



Рәс. 6

Бу мәйданчык аша барлык эчке көчәнешләрнең бер өлеше тапшырыла. Бу очракта C ноктасындагы көчәнеш $p = \frac{dR}{dA}$ (эчке көчләр интенсивлылыгы) була, аның үлчәү берәмлекләре: Н/м^2, МПа.

dR элементар көчен dN һәм dQ өлешләренә таркатабыз:

1) аркылы кисемгә перпендикуляр булган dN көченә;

2) аркылы кисемдә яткан орынма dQ көченә.

Ул вакытта $\sigma = \frac{dN}{dA}$ — C ноктасындагы нормаль көчәнеш була, ә $\tau = \frac{dQ}{dA}$ C ноктасындагы орынма көчәнеш була.

Нормаль һәм орынма көчәнешләрнең зурлыгына карап, конструкциянең ныклыгы турында нәтиҗә ясарга мөмкин.

3.2. Рөхсәт ителгән көчәнеш. Ныклык запасы

Көчәнеш кечкенә булганда, конструкция яхшы эшли. Көчәнеш арткан саен, конструкция җимерелергә мөмкин, ягъни эш өчен яраксызга әйләнергә мөмкин. Шундый көчәнешне *куркыныч нормаль көчәнеш* $\sigma_к$ яки *куркыныч орынма көчәнеш* $\tau_к$ дип атыйлар. Машина ватылмыйча эшләсен өчен, анда барлыкка килгән көчәнешләр $\sigma_{эш}$ $(\tau_{эш})$ зурлыклары рөхсәт ителгән σ_{adm} (τ_{adm}) көчәнешләреннән артмаска тиеш:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_к}{n} \ \left(\tau_{adm} = \frac{\tau_к}{n} \right),$$

биредә $n > 1$ — ныклык запасы коэффициенты.

Ул махсус техник нормалар буенча, машинаның вазыйфасы, исәпнең төгәл булуы, детальнең эш шартларына карап, конструктор тарафыннан сайлап алына. Тәҗрибәдә үзле җисемнәр өчен n = 1,4÷4,5; үзле булмаган җисемнәр өчен n = 3÷4.

3.3. Сузылу (кысылу). Көчәнешне билгеләү

Йөкләнгән стерженьның аркылы кисемендә бары тик N буй көче генә барлыкка килсә, ә калган эчке көч факторлары нульгә тигез булса, бу аның *сузылуы* яки *кысылуы* дип атала.

Тәҗрибәләр күрсәткәнчә, стерженьның аркылы кисем мәйданы буенча N буй көче бертигез тарала. Бу вакытта көчәнеш мондый формула буенча табыла:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

биредә A — стерженьның аркылы кисем мәйданы. Димәк, σ көчәнеше сузылганда — уңай, ә кысылу вакытында — тискәре, ягъни N ның тамгасы белән туры килә.

Сузылган стерженьның ныклык шарты түбәндәгечә билгеләнә:

$$\sigma \le \sigma_{adm},$$

биредә σ_{adm} — рөхсәт ителгән көчәнеш.

Ныклыкны исәпләү формуласы түбәндәге рәвештә языла:

$$\frac{N}{A} \le \sigma_{adm}.$$

Бу формуланы кулланып, өч төрдәге мәсьәлә чишәргә була.

1. Конструкция элементларының аркылы кисеме үлчәнешләрен билгеләү таләп ителә. Бу мәсьәлә түбәндәге тигезсезлек ярдәмендә чишелә:

$$A \ge \frac{N}{\sigma_{adm}}.$$

Мондый исәпләү конструкциянең үлчәмнәрен билгеләгәндә башкарыла һәм ул *проект исәпләве* дип атала.

2. Детальнең материалы σ_{adm} аркылы кисемдәге үлчәмнәре A билгеле булса, йөкләнешнең рөхсәт ителгән зурлыгын билгеләү таләп ителә. Бу мәсьәлә мондый тигезсезлек ярдәмендә чишелә:

$$N \le \sigma_{adm} A.$$

Мондый мәсьәләне конструкциянең йөк *күтәрү сәләтен билгеләү мәсьәләсе* дип атыйлар.

3. Конструкциягә килгән йөкләнеш N, аның үлчәмнәре A һәм материаллары σ_{adm} билгеле булганда, конструкция эшләгән вакытта барлыкка килгән көчәнешне табарга, һәм $\sigma \le \sigma_{adm}$ ныклык шарты үтәләме, юкмы икәнен белергә.

Әгәр ныклык шарты үтәлсә, конструкция нормаль эшләячәк.

Мондый исәпләү *тикшерү исәбе* дип атала.

Мәсьәләләрнең өч төрен дә башка деформацияләрдә дә кулланырга мөмкин.

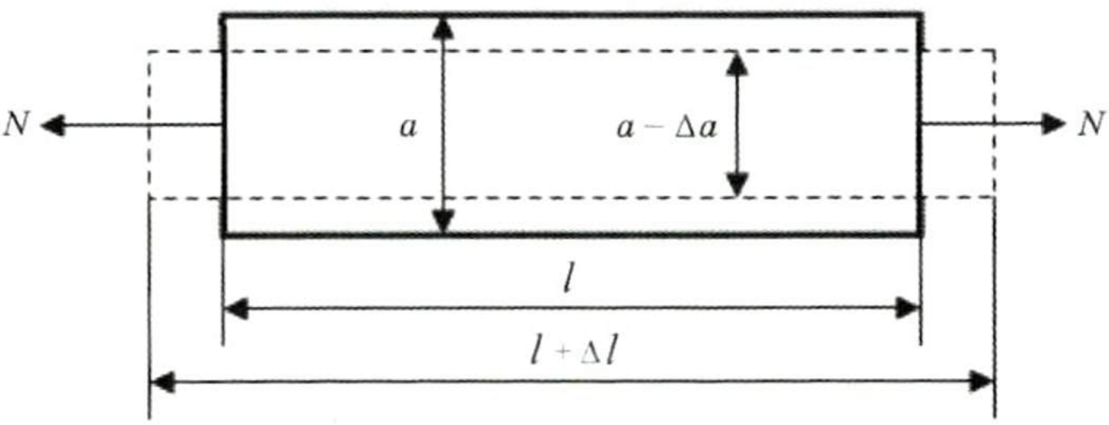
3.4. Сузылу очрагындагы деформацияләр. Гук законы

Стерженьның сузылу деформациясен тикшерәбез (рәс. 7). Биредә l — йөкләнешкә кадәрге стерженьның буе, $l+\Delta l$ — йөкләнгәннән соң стерженьның буе, Δl — стерженьның абсолют озынаюы, a — йөкләнешкә кадәрге стерженьның киңлеге, $(a+\Delta a)$ — йөкләнештән соң стерженьның киңлеге, Δa — стерженьның абсолют тараюы ($\Delta a<0$). Стерженьның чагыштырмача озынаюы түбәндәгечә табыла:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Кечкенә озынаюлар очрагында, күп материаллар өчен Гук законы үтәлә, ул буйлы деформация белән кисемдәге көчәнеш арасындагы бәйләнешне ачыклый:

$$\sigma = E\varepsilon \text{ яки } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$



Рәс. 7

Әгәр стерженьга йөкләнештән башка температура да тәэсир итсә, чагыштырмача деформация түбәндәгечә була:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t,$$

α — температура үзгәргәндә материалның киңәю коэффициенты.

Пропорциональлек коэффициенты *E эластиклык (Юнг) модуле* дип атала. Эластиклык модуленең үлчәме Н/мм^2; яки МПа берәмлекләрендә үлчәнә.

E модуле материалның төренә бәйле һәм аның катылыгын аңлата. *E* зурайган саен, материалның катылыгы зурая. *E* модуле зурлыгы тәҗрибә юлы белән табыла, мәсәлән, корыч өчен $E = 2\cdot 10^5$ Н/мм^2.

Башка материалларның E модульләре махсус таблицалардан алына.

Гук законын башка рәвештә дә язарга мөмкин.

Билгеле булганча,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \text{ һәм } \sigma = \frac{N}{A}.$$

Гук законын кулланып,

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

формуласын табабыз.

Бу формула гомумиләштерелгән формада түбәндәгечә языла:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{Ndx}{EA},$$

биредә EA тапкырчыгышы стерженьның *сузылу деформациясенең катылыгы* дип атала.

Сузылу вакытында стержень аркылыга тараю кичерә. Чагыштырмача аркылыга тараюны $\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}$ дип, чагыштырмача озынаюны $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ дип билгеләсәк, алар арасында шундый бәйлелек табыла: $\varepsilon_1 = -\mu\varepsilon$, биредә μ — Пуассон коэффициенты. Ул материал төренә бәйле һәм эксперимент аша билгеләнә. Металлар өчен $\mu = 0{,}3 \div 0{,}35$, гомумән, тәҗрибәдән билгеле булганча, $\mu \le 0{,}5$ (изотропик җисемнәр өчен).

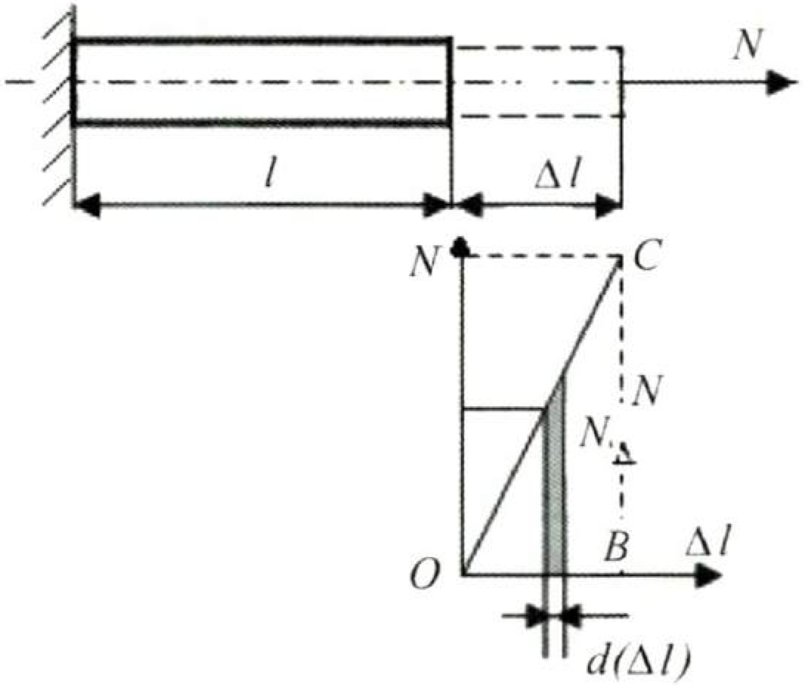
Кайбер очракларда машиналар ватылмый эшләсен өчен, аның элементларының деформациясе билгеле бер зурлыктан Δl зуррак булмаска тиеш, ул рөхсәт ителгән *сузылу (кысылу)* дип аталучы зурлык. Бу очракта ныклыкны исәпләүдән тыш, катылыкны да исәплиләр. Әгәр катылык исәпләү шартын исәпкә алсак ($\Delta l \leq \Delta l_{adm}$), катылык исәпләү формуласы килеп чыга:

$$\frac{Nl}{EA} \leq \Delta l_{adm} .$$

Көчәнеш һәм деформацияне исәпләгәндә, күптөрле йөкләнешләр очрагында *Сен-Венан принцибы* киң кулланыла. Әгәр җисем статик эквивалент көчләр системалары белән йөкләнсә һәм йөкләнеш өлкәсе җисемнең үлчәмнәренә караганда кечерәк булса, кисемнәрдә йөкләнеш куелган урыннан еракта торган көчәнешләр төп вектор һәм төп момент зурлыкларына бәйле.

3.5. Деформациянең потенциаль энергиясе

Стерженьны тышкы көчләр белән йөкләү нәтиҗәсендә механик эш башкарыла. Механик эшне A дип билгелик. Эш нәтиҗәсендә потенциаль энергия U туплана. Стержень статик рәвештә *йөкләнгәндә*, деформациянең потенциаль энергиясе механик эшкә тигез: $U = A\Delta l$ деформациясе N йөкләнешенә туры пропорциональ була һәм алар арасындагы бәйлелек 8 нче рәсемдә OC туры сызыгы белән сурәтләнә (эластик деформацияләр).



Рәс. 8

Деформация процессында йөкләнеш нульдән N га кадәр үзгәрә. Элементар dA эше N_{Δ} көче белән элементар күчү $d(\Delta l)$ ның тапкырчыгышына тигез:

$$dA = N_{\Delta}\, d(\Delta l).$$

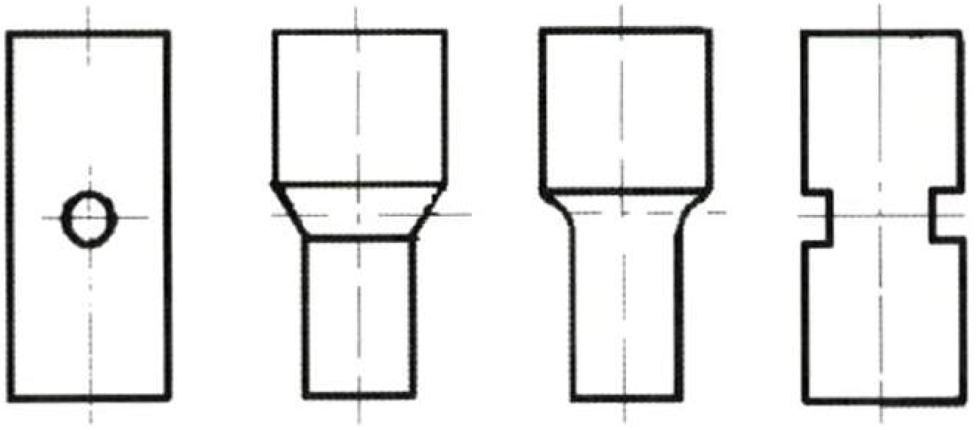
Ә инде стерженның Δl озынаюына тотылган эш ΔOBC мәйданына тигез. Димәк, $A = U = 0{,}5N\Delta l$, $\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}$ булганлыктан, $U = \dfrac{N^2 l}{2EA}$.

Җисемнең берәмлек күләмендә җыелган потенциаль энергиясен исәплик: $u = \dfrac{U}{V} = \dfrac{U}{A \cdot l} = \dfrac{N^2 \cdot l}{2EA \cdot Al} = \dfrac{1}{2E} \cdot \dfrac{N^2}{A^2}$. Билгеле булганча, $\dfrac{N}{A} = \sigma$, ә $\dfrac{\sigma}{E} = \varepsilon$, моннан $u = \dfrac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}$.

4. Көчәнешнең концентрациясе

Әгәр сузылган стерженьда тишекләр (рәс. 9, *а.*), галтельләр (*б,в*), киселгән өлешләр (*г*), резьбалар бар икән, аларның аркылы кисем мәйданы буйлап көчәнеш төрлечә таралырга мөмкин. Ул вакытта аркылы кисемнең кайбер нокталарында көчәнешләр зуррак һәм алар детальнең җимерелүенә сәбәпче булалар. Бу күренеш көчәнешнең *концентрациясе (ишәюе)* дип атала.

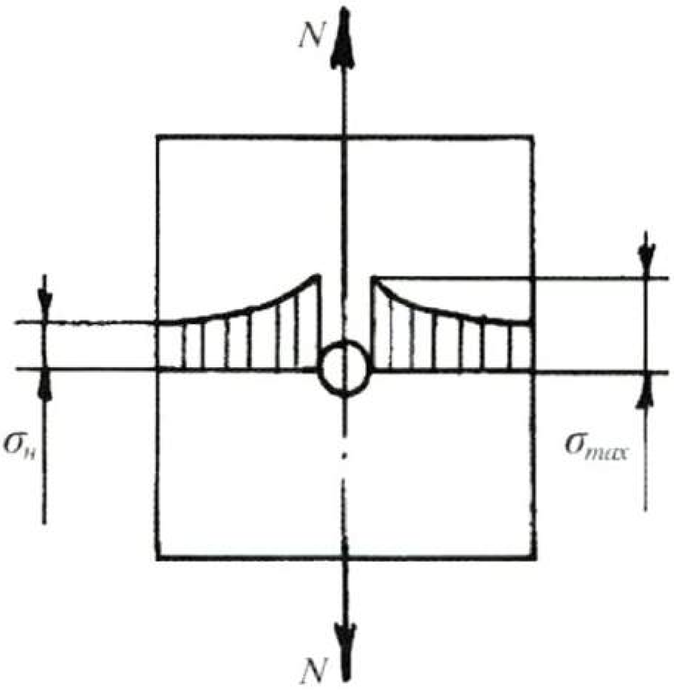
Көчәнешнең концентрациясенә сәбәпче булган фактор көчәнешнең *концентраторы* дип атала.



а *б* *в* *г*

Рәс. 9

Концентрация урынындагы көчәнешне *урынлы көчәнеш* дип атыйлар.



Рәс. 10

Көчәнешнең концентрация дәрәҗәсен көчәнешнең концентрация коэффициенты белән билгелиләр:

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_н},$$

биредә $\sigma_н$ номиналь көчәнеш түбәндәге формула аша билгеләнә: $\sigma_н = N/A$. $\sigma_{\max}$ — көчәнешнең концентрациясе зонасында *максималь* (иң зур) *көчәнеш* дип атала. Ул сыгылмалылык теориясе методлары аша билгеләнә, шуңа күрә α_σ ны көчәнешләр концентрациясенең *теоретик коэффициенты* дип атыйлар. Әмма көчәнешләр концентрациясе коэффициенты реаль материаллар өчен гадәттәге теоретик кыйммәттән кимрәк.

Шуңа күрә көчәнеш концентрациясенең *эффектлы коэффициенты* k_σ дигән төшенчә кертелә. Көчәнеш концентрациясенең эффектлы коэффициенты k_σ ның кыйммәте һәрбер материал өчен тәҗрибә юлы белән табыла:

$$k_\sigma = \frac{P_m}{P_{mk}},$$

биредә P_m — концентраторсыз элементтагы максималь йөкләнеш, P_{mk} — концентраторлы элементтагы максималь йөкләнеш.

Көчәнеш концентрациясенең теоретик коэффициенты α_σ һәм көчәнеш концентрациясенең эффектлы коэффициенты k_σ белешмәлекләрдән табыла.

Детальнең ныклыгына көчәнеш концентрациясе төрлечә тәэсир итә, ул материалның пластиклыгына һәм куелган йөкләнеш төренә бәйле. Материал җитәрлек дәрәҗәдә пластик һәм аның агучанлык мәйданы булса һәм иң зур мәйдан биләп торган көчәнешләр агучанлык чиге σ_a га ирешкәч, аларның үсүе вакытлыча туктаячак, ә кисемнең калган нокталарында көчәнешләр агучанлык чигенә җиткәнче үсәчәкләр. Шулай итеп, көчәнешләрнең тигезләнүе барлыкка килә, шуңа күрә статик көчәнеш вакытында пластик материаллардан ясалган конструкцияләрнең ныклыгын исәпләгәндә, көчәнеш концентрациясен исәпкә алмыйлар һәм исәпләүне мондый бәйлелек аша башкаралар:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le \sigma_{adm}.$$

Уалучан материаллар кулланганда, кисемдә көчәнешләрнең тигезләнүе барлыкка килми, шуңа күрә көчәнешләр үскән вакытта ныклыкның чиге σ_{max} га җиткәч, материалларның җимерелүе башлана. Бу очракта ныклыкны исәпләгәндә, көчәнешләрнең концентрациясен исәпкә алырга кирәк:

$$\sigma_{max} = k_{\sigma}\sigma_{н}, \quad \sigma_{max} = k_{\sigma}\frac{N}{A} \le \sigma_{adm}.$$

Бер детальдән икенчесенә зур булмаган бүлемтек аша көч тәэсир итсә, шул урында зур мәйданлы көчәнешләр барлыкка килә. Мәсәлән, шестерняларның тешләре бер-берсенә тигән урында, подшипникларда һ.б. Бу вакытта барлыкка килгән көчәнешләрне *контакт көчәнешләре* дип атыйлар.

Контакт көчәнешләр зурлыгы сыгылмалылык теориясе методлары белән табыла. «Машина детальләре» курсында контакт көчәнешләре өчен эмпирик формулалар китерелә.

5. Сузылуга (кысылуга) эшли торган статик билгеләнмәүче системалар

Әгәр көчләр системасының билгесез көчләр саны статика тигезләмәләре саныннан күбрәк булса, андый системаларны *статик билгеләнмәүче системалар* дип атыйлар. Бу очракта билгесез көчләрне статика тигезләмәләре аша табу мөмкин түгел.

Материаллар каршылыгы методларына таянып, статика тигезләмәләренә тагын берничә тигезләмә өстәргә мөмкин. Ул тигезләмәләр *деформация тигезләмәләре* дип атала. Аларны кулланып, статик билгеләнмәүче системаларны статик билгеләнүче системаларга китереп була.

(Статик билгеләнмәү дәрәҗәсе) = (билгесез көчләр саны) — (бәйсез статика тигезләмәләре). *Деформация тигезләмәләренең саны статик билгеләнмәү дәрәҗәсенә тигез.*

Багана мисалында (рәс. 11) статик билгеләнмәүче система исәпләүне карап китик.

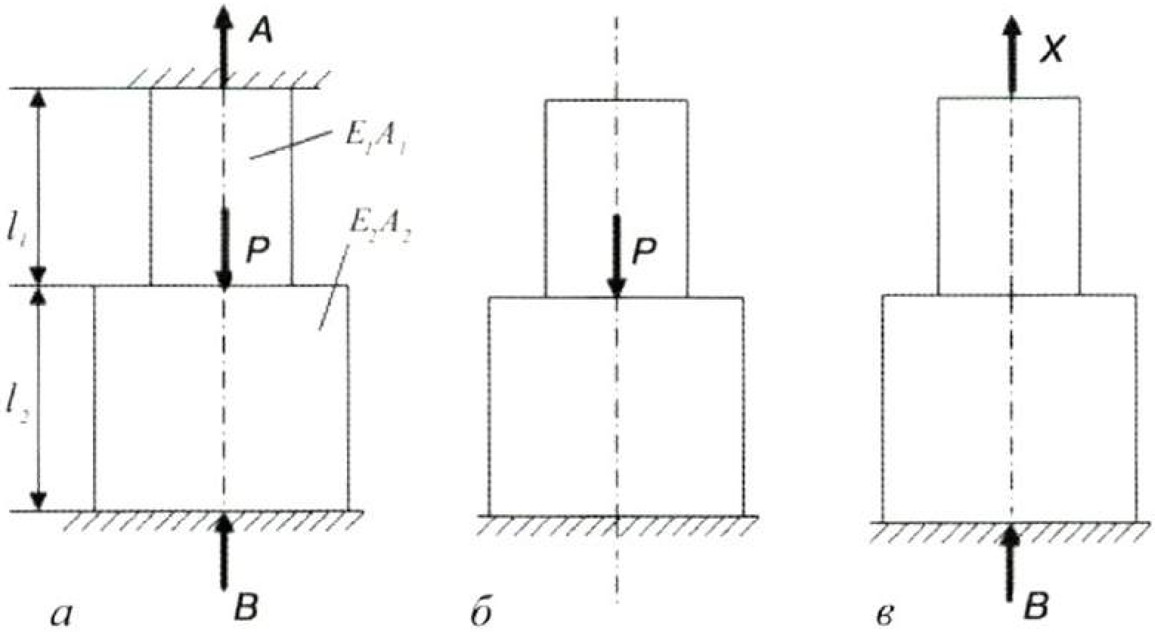
Багананың үлчәмнәре, материалы һәм йөкләве билгеле.

Бу мисалда *A* һәм *B* терәкләренең реакцияләрен табарга кирәк.

Бу очракта бер генә статика тигезләмәсен язарга мөмкин:

$$\sum Y = A - P + B = 0 .$$

Ә билгесез көчләр ике, димәк, системаның статик билгеләнмәү дәрәҗәсе бергә тигез була. Бу мисалны чишәр өчен, тагын бер тигезләмә төзергә кирәк. Аны көч методын кулланып төзибез. Ул метод моннан гыйбарәт: бирелгән статик билгеләнмәүче системадан (рәс. 11, *а*) статик билгеләнүче төп системага күчәбез (рәс. 11, *б*). Аның өчен өске беркетүне алып ташлыйбыз.



Рәс. 11

Бирелгән һәм төп система арасындагы аерманы бетерәбез, аның өчен юкка чыгарылган өске беркетү урынына X көчен куябыз (рәс. 11, *в*). Әгәр дә өске беркетү урынына куелган X көче һәм өске беркетү реакциясе A тигез булсалар, бу барлыкка килгән система эквивалент була (рәс 11, *в*.), ул вакытта $\Delta_P + \Delta_X = 0$, биредә Δ_X — эквивалент системаның X көченнән озынаюы; Δ_P — шулай ук төп системаның P көченнән кыскаруы. Бу тигезләмә бағананың гомуми деформациясе юклыгын белдерә һәм *деформация тигезләмәсе* дип атала.

Билгеле булганча, $\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}$.

Бу формула буенча:

$$\Delta_P = -\frac{Pl_2}{E_2A_2},$$

$$\Delta_X = X\left(\frac{l_1}{E_1A_1}+\frac{l_2}{E_2A_2}\right).$$

Моннан деформация тигезләмәсе түбәндәгечә була:

$$-\frac{Pl_2}{E_2A_2}+X\left(\frac{l_1}{E_1A_1}+\frac{l_2}{E_2A_2}\right)=0.$$

Димәк,

$$A = X = \frac{P}{\frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{E_2A_2}{E_1A_1}+1}.$$

Моннан күренгәнчә, E_1A_1 зуррак булган саен, A реакциясе дә үсә бара. Шуңа күрә статик билгеләнмәүче системаның беренче үзлеге түбәндәгедән гыйбарәт: *конструкция элементының катылыгы арткан саен, аңа куелган йөкләнеш тә зуррак була*.

Артык билгесезләрне тапканнан соң, калган реакцияләр статик тигезләмәләреннән исәпләү методлары белән табылалар.

6. Көчәнешле һәм деформацияле халәтләр теориясе

6.1. Ноктадагы көчәнешле халәт турында төшенчә

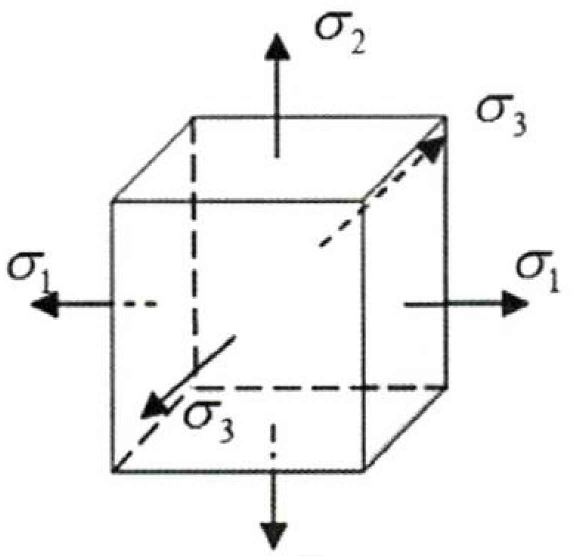
Ниндидер конструкция элементларының тәэсир итешүен элементның һәрбер ноктасындагы нормаль һәм орынма көчәнешләре белән билгеләргә була.

Алда карап үткән сузылу (кысылу) мисалыннан күренгәнчә, кисемнең авышлык почмагы үзгәрү белән андагы көчәнешләр дә

үзгәрә. Бирелгән нокта аша үткән кисемнәрнең бөтен күплегендә барлыкка килгән нормаль һәм орынма көчәнешләрнең җыелмасы шул ноктадагы *көчәнешле халәт* дип атала.

6.2. Төп мәйданчыклар һәм көчәнешләр. Көчәнешле халәт төрләре

Җисемнең һәрбер ноктасында нормаль көчәнеш кенә тәэсир иткән бер-берсенә перпендикуляр өч мәйданчык табарга була. Нормаль көчәнеш кенә тәэсир иткән, ә орынма көчәнеше нульгә тигез булган мәйданчыклар — *төп мәйданчыклар* дип, ә аларның нормаль көчәнешләре *төп көчәнешләр* дип атала.



Рәс. 12

Яклары шундый төп мәйданчыклар булган элементар параллелепипед 12 нче рәсемдә күрсәтелгән. Төп көчәнешләрне

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ дип билгелибез һәм аларның иң зурысы σ_1, иң кечкенәсе σ_3 була, ул вакытта түбәндәге тигезсезлек барлыкка килә:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Төп көчәнешләрнең берсе дә нульгә тигез булмаса, көчәнешле халәт *өч үлчәмле* (күләмле) *көчәнешле халәт* дип атала:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0.$$

Төп көчәнешләрнең берсе нульгә тигез булса, көчәнешле халәт *ике үлчәмле (яссы)* дип атала. Яссы көчәнешле халәтнең өч очрагы булырга мөмкин:

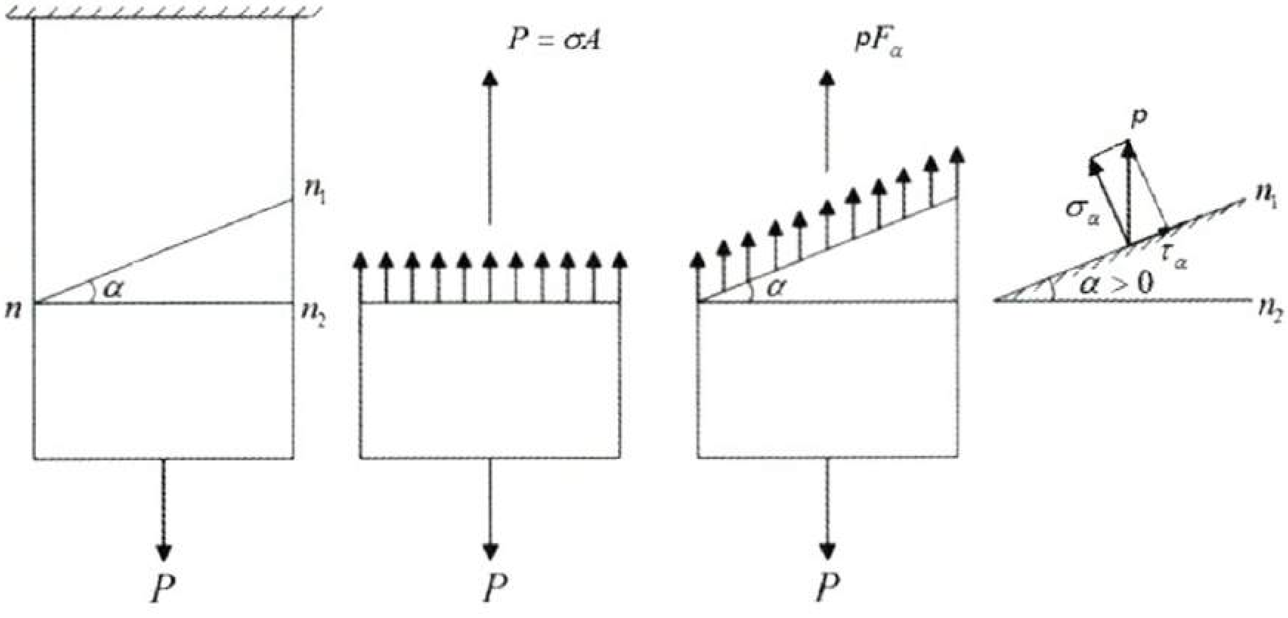
1) $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$ — бер-берсенә перпендикуляр булган ике якка сузу;

2) $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$ — бер якка сузу, икенче яктан кысу;

3) $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ — ике яктан да кысу.

Әгәр өч төп көчәнешнең берсе генә нульгә тигез булмаса, көчәнешле халәт *бер үлчәмле* яки *сызыкча* дип атала. Ул көчәнешнең *сузу* ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$) яки *кысу* ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$) халәте була. Көчәнешле халәтнең иң гадие (сызыкча көчәнешле халәт) алдагы бүлекләрдә өйрәнелде.

6.3. Сызыкча көчәнешле халәт



Рәс. 13

Борысның аркылы кисемнәрендә үзәктән сузылу яки кысылу вакытында тигез бүленгән нормаль көчәнешләр барлыкка килә:

$$\sigma = \frac{P}{A}.$$

Борысның буй күчәренә карата авыш кисемендәге көчәнешләрне карап китик (рәс. 13). Моның өчен авышкан кисем $n–n_1$ һәм аркылы кисем $n–n_2$ арасындагы почмакны α дип билгелик. $n–n_2$ аркылы кисемен, авышкан кисем белән туры китерер өчен, аны сәгать теле йөрешенә каршы юнәлтергә кирәк, ул вакытта α почмагы *уңай* дип исәпләнә.

Борыс кысылган һәм сузылган вакытта, буй күчәренә параллель барлык җепселләрнең озынаюы бертигез була (*җепсел* дип стерженьның буй күчәренә параллель булган һәм бик кечкенә аркылы

кисемле элементын атыйбыз). Болай фикерләү кисемдәге нормаль көчәнешләрнең зурлыгын барлык нокталарда да бер дип фараз итәргә мөмкинлек бирә.

Тигезлек шартыннан табабыз:

$$P = pA_\alpha,$$

биредә A_α — авышкан n–n_1 кисеменең мәйданы, ул $A/\cos\alpha$ зурлыгына тигез (A — борысның аркылы кисеме мәйданы).

Югарыдагы формуладан

$$p = \frac{P}{A_\alpha} = \frac{P\cos\alpha}{A} = \sigma\cos\alpha$$

чыга, биредә σ — аркылы кисемдәге нормаль көчәнеш.

Тулы көчәнешне (p) ике компонентка таркатырга мөмкин:

σ_α — n–n_1 кисеменә перпендикуляр (нормаль) көчәнеш һәм τ_α — шушы яссылыкта ятучы орынма көчәнеш. 13 нче рәсемнән күренгәнчә,

$$\sigma_\alpha = p\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = p\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \quad \text{була.}$$

Нормаль көчәнеш сузылган вакытта *уңай*, ә кысылганда *тискәре* дип санала. Орынма көчәнешне күрсәткән вектор җисемне сәгать теле йөргән якка борырга омтылса, бу — уңай көчәнеш.

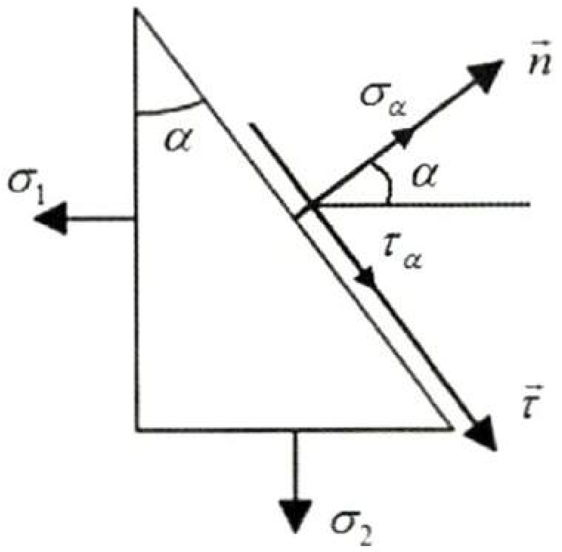
Иң зур нормаль көчәнешләр $\alpha = 0$ булганда, борысның аркылы кисемнәрендә була: $\sigma_\alpha^{\max} = \sigma$, ә иң кечкенә нормаль көчәнешләр

$\alpha = 90^0$ булганда, $\sigma_\alpha = 0$ була. Шуңа күрә сузылган яки кысылган борысның ныклыгын аның аркылы кисемнәрендәге нормаль көчәнешләр буенча исәплиләр.

Орынма көчәнешләр максималь зурлыкка $\alpha = \pm 45^0$ булганда ия булалар:

$$\tau_{\alpha_{max}} = \frac{\sigma}{2}.$$

6.4. Яссы көчәнешле халәт. Авыш кисемдәге көчәнешләр



Рәс. 14

Җисемнән өч пар төп мәйданчык белән элементар параллелипипед бүлеп алыйк, аның якларында төп көчәнешләр $\sigma_1 > \sigma_2 > 0; \sigma_3 = 0$ булсын.

Авыш α кисемендәге көчәнешләрне табып карыйк (рәс. 14). Авыш кисемнең мәйданы A_α, сул якның мәйданы $A_\alpha \cos\alpha$, аскы

якның мәйданы $A_\alpha \sin\alpha$. Шул мәйданчыклардагы көчләр $\sigma_1 A_\alpha \cos\alpha$ га һәм $\sigma_2 A_\alpha \sin\alpha$ га тигез булалар.

Авыш кисемдә нормаль көчәнеш σ_α һәм орынма көчәнеш τ_α барлыкка килә, ә ул кисемдә тәэсир итә торган көчләр $\sigma_\alpha A_\alpha$ һәм $\tau_\alpha A_\alpha$ була. Бүлеп күрсәтелгән призманың тигезләнеш шартларын языйк:

$$\sum \overline{n} = 0,$$

$$\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A_\alpha \cos\alpha \cos\alpha - \sigma_2 A_\alpha \sin\alpha \sin\alpha = 0,$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha,$$

$$\sum \overline{\tau} = 0,$$

$$\tau_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A_\alpha \cos\alpha \sin\alpha + \sigma_2 A_\alpha \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha .$$

Бу формулаларга анализ ясап чыгыйк. Максималь һәм минималь нормаль көчәнешне табу өчен, σ_α формуласының чыгарылмасын алып, аны нульгә тигезлибез:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$

$$-2\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = 0, \tau_\alpha = 0.$$

Шулай итеп, нормаль көчәнешнең экстремум шарты орынма көчәнеш булмау шарты белән тәңгәл килә, димәк, *төп көчәнешләр — максималь* һәм *минималь нормаль көчәнешләр*. Дөрестән дә,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = 0$$

тигезләмәсеннән түбәндәге тигезлек чыга:

$$\sin 2\alpha = 0 .$$

Бу тигезләмәдән табабыз:

$$\alpha_1 = 0, \;\; \alpha_2 = 90^0 .$$

Төп мәйданчыкларны табып, аларга туры килгән нормаль көчәнешләрнең берсен — максималь $\sigma_{\max} = \sigma_1$, икенчесен минималь $\sigma_{\min} = \sigma_2$ дип билгелибез. Максималь орынма көчәнешнең кисеме — төп мәйданчыкка 45^0 белән авышкан, аның зурлыгы түбәндәгечә:

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} .$$

Бу формуланы иң катлаулы — өч үлчәмле көчәнешле халәт очрагына гомумиләштереп, максималь орынма көчәнеш зурлыгы төп көчәнешләрнең иң зур аермасының яртысына тигез булуын ачыклыйбыз:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} .$$

Әгәр 14 нче рәсемдәге элементның туры почмак хасил иткән якларына σ_1, σ_2 урынына σ_x, σ_y, τ_{xy} тәэсир итсә, югарыда кулланылган ысул белән мондый формулаларны табып була:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha ,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha .$$

6.5. Экстремаль нормаль көчәнешләр

Конструкцияне исәпләгәндә бирелгән нокта аша үткән барлык мәйданчыклардагы көчәнешләрне исәпләү мәҗбүри түгел. Гадәттә экстремаль (максималь һәм минималь) көчәнешләр зурлыгын белү дә җитә.

Төп көчәнешләрнең зурлыгын һәм төп мәйданчыкларның торышын белү өчен, α почмагы буенча нормаль көчәнешнең беренче чыгарылмасын нульгә тигезлибез:

$$\left(\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right) = -\sigma_x 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \sigma_y 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \tau_{xy} 2 \cos 2\alpha_0 = 0,$$

яки

$$\left(\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right) \sin 2\alpha_0 + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

биредә α_0 – σ_x көчәнеше тәэсир иткән мәйданчыкка төп мәйданчыкның авышу почмагы.

Соңгы тигезләмәдән табабыз:

$$\mathrm{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} .$$

Бу формула ике үзара перпендикуляр мәйданчыклар өчен α_0 һәм $\alpha_0 + 90^0$ почмакларының зурлыкларын ачыклый. Аларның торышын билгеләү өчен, σ_x һәм σ_y көчәнешләре тәэсир иткән мәйданчыкларны сәгать теле йөрешенә каршы юнәлтергә кирәк ($\alpha_0 > 0$ очрагында), яки сәгать теле йөргән якка ($\alpha_0 < 0$ очрагында). $\mathrm{tg}2\alpha_0$ буенча нинди дә булса $2\alpha_0$ санын ($-\frac{\pi}{2}$дән $+\frac{\pi}{2}$ кадәр) табарга мөмкин, яки α_0 не ($-\frac{\pi}{4}$тән $+\frac{\pi}{4}$ кадәр).

Беренче төп мәйданчыкта σ_{max}, ә икенчесендә σ_{min} тәэсир итә. Яссы көчәнешле халәт формулаларыннан экстремаль көчәнешләр өчен түбәндәге формуланы табарга була:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\,.$$

6.6. Шудырып күчерү мәйданчыклары. Экстремаль орынма көчәнешләр

Орынма көчәнешләр экстремаль зурлыкта булган мәйданчыкларны табыйк, шундый мәйданчыкларны *шудырып күчерү мәйданчыклары* дип атыйлар. Аның өчен τ_α беренче чыгарылмасын нульгә тигезлибез:

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} = \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\alpha_1 + 2\tau_{xy}\sin 2\alpha_1 = 0,$$

$$\mathrm{tg}2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}},$$

биредә α_1 — шудырып күчерү мәйданчыгының σ_x көчәнеше тәэсир итә торган мәйданчыкка авышу почмагы.

Әгәр α_1 почмагы уңай булса, σ_x тәэсир итә торган мәйданчыкны сәгать теле йөрешенә каршы булган почмакка борырга кирәк, ул вакытта максималь орынма көчәнеш тәэсир итә торган мәйданчык килеп чыга. Аңа карата перпендикуляр майданчыкта $\tau_{\min}$ тәэсир итә. Орынма көчәнешләрнең парлылык законыннан чыгып табабыз:

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min}.$$

$\mathrm{tg}2\alpha_0$ һәм $\mathrm{tg}2\alpha_1$ формулаларын чагыштырып, түбәндәге тигезлекне табабыз:

$$\mathrm{tg}2\alpha_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}2\alpha_0}.$$

Моннан:

$$90^0 - 2\alpha_1 = -2\alpha_0,$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + 45^0.$$

Шулай итеп, шудырып күчерү мәйданчыклары төп мәйданчыкларга карата 45^0 лы почмак белән авышкан.

τ_{max} һәм τ_{min} зурлыкларын билгеләү өчен, σ_{max} һәм σ_{min} зурлыкларын бирелгән зурлыклар дип алабыз, ул вакытта

$$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2},$$

яки,

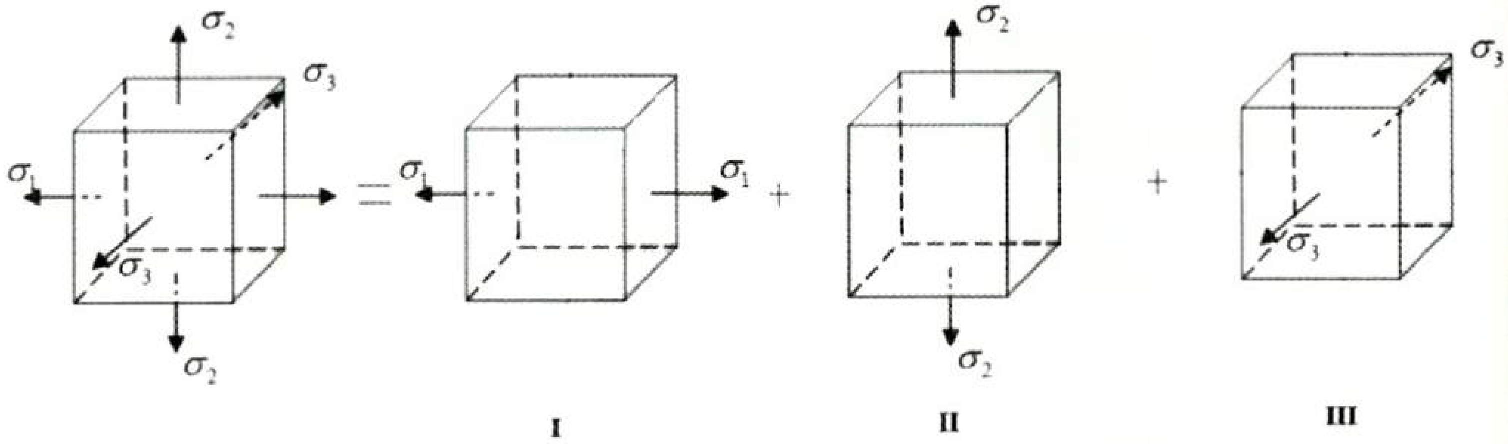
$$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

6.7. Гомумиләштерелгән Гук законы

Гади сузу-кысу очрагында гына түгел, җисемнең иң катлаулы өч үлчәмле көчәнешле халәтендә дә деформация белән көчәнешләр арасындагы бәйлелек Гук законы нигезендә билгеләнә.

Башта бер яңа төшенчә кертик. Төп көчәнешләр юнәлешендәге чагыштырма деформацияләр *төп деформацияләр* дип атала. Деформация кыйммәтләре ε_1, ε_2, ε_3 төп көчәнешләр σ_1, σ_2, σ_3ләргә туры килә. Төп көчәнешләр һәм төп деформацияләр арасындагы бәйлелекне табу өчен, суперпозиция принцибы нигезендә бирелгән көчәнешле халәтне (рәс. 15) өч гади көчәнешле халәт суммасы итеп күрсәтик. Беренче төп деформацияне

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1'''$$



Рәс. 15

өч гади сузу σ_1 юнәлешендә тудырган деформацияләрне кушып билгелибез:

$\varepsilon' = \dfrac{\sigma_1}{E}$ — беренче төп деформациянең σ_1 дән барлыкка килгән өлеше,

$\varepsilon_1'' = -\mu \dfrac{\sigma_2}{E}$ һәм $\varepsilon_1''' = -\mu \dfrac{\sigma_3}{E}$ — беренче төп юнәлешкә туры килгән, σ_2 һәм σ_3 көчәнешләреннән килеп чыккан аркылы деформацияләр.

Шулай итеп,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right].$$

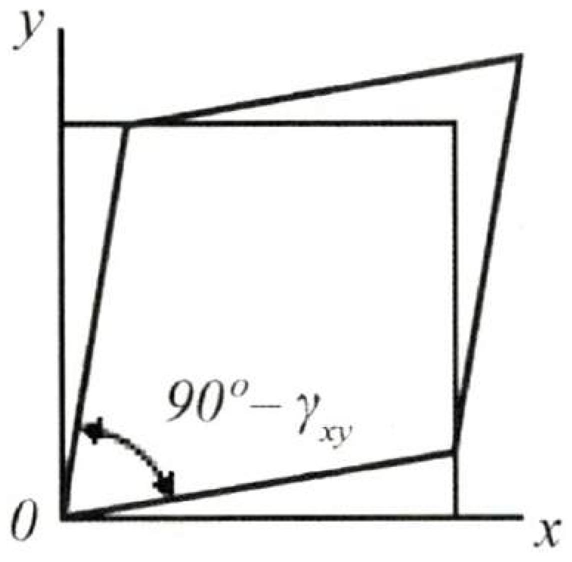
Бүлеп алынган элементның яклары төп мәйданчыклар булмаса, гомумиләштерелгән Гук законы болай языла:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right], \ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Ул мәйданчыкларда орынма көчәнешләр бар, шуңа күрә анда шуышу деформацияләре барлыкка килә (рәс. 16). Шуышу деформациясе — ул элементның башта туры булган почмагының үзгәрү зурлыгы (радиан). Аларны γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} дип билгелиләр, мондагы индекслар шуышу



Рәс. 16

яссылыгын күрсәтә; G хәрефе белән материалның *шуышу модуле*, ягъни *икенче төр эластиклык модуле* билгеләнә. Бу яңа төшенчәләр турында сүз алда булыр.

6.8. Катлаулы көчәнешле халәтнең потенциаль энергиясе

Җисемнән бүлеп алынган параллелепипедның якларында төп көчәнешләр: σ_1, σ_2, σ_3 һәм төп деформацияләр: ε_1, ε_2, ε_3 тәэсир итә. Чагыштырма потенциаль энергияне исәпләп табыйк. Төп көчәнешләр аерым-аерым тәэсир иткән булса, потенциаль энергия түбәндәгечә:

$\frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1$, яки $\frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2$, яки $\frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3$ булыр иде.

Алар барысы бергә тәэсир итәләр, шуңа күрә суперпозиция принцибы нигезендә потенциаль энергия түбәндәгегә тигез:

$$u = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 .$$

Төп деформацияләр урынына аларның Гук законындагы аңлатмаларын кертсәк, чагыштырма потенциаль энергия өчен формула болай языла:

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] .$$

7. Ныклык теорияләре

7.1. Төп аңлатмалар

Сузылу-кысылу мисалыннан күргәнебезчә, йөк үскән саен, стерженьның аркылы кисемендә нормаль көчәнеш үсә бара, һәм

көчәнешнең берникадәр зурлыгында материал куркыныч, ахыр чиктәге халәткә житә. Куркыныч көчәнешнең зурлыгын σ_o дип билгелик. Уалучан материал өчен куркыныч дип жимерелүгә китерә торган көчәнешне — ныклык чиге $\sigma_в$ ны алалар:

$$\sigma_к = \sigma_в,$$

пластик материал өчен куркыныч көчәнеш дип агучанлык чиге σ_a ны саныйлар:

$$\sigma_к = \sigma_a,$$

практикада нәкъ шул чиктән соң *калдык деформацияләр* барлыкка килә башлый. Куркыныч көчәнеш зурлыгы сузу-кысу тәжрибәләрендә билгеләнә.

Ике яки өч үлчәмле көчәнешле халәттә ныклыкны исәпләү шактый катлаулы, чөнки көчәнешле халәтнең шушы очракларына туры килгән сынаулар юк, материалларның үзлекләре сузу-кысу сынавында гына билгеләнә. Көчәнешле халәтнең бу катлаулы очракларында ныклыкны исәпләү өчен *ныклык теориясе* кирәк. Ныклык теориясенең төп бурычы: сузу-кысу сынаулары нәтиҗәләренә нигезләнеп, ике яки өч үлчәмле көчәнешле халәтнең бирелгән конкрет очрагында ныклык турында нәтиҗә ясау.

Шулай итеп, бер күчәрле сузылу һәм кысылуга уздырылган тәжрибә нәтиҗәләре ныклык эталоны булып торалар, эталон ярдәмендә теләсә кайсы көчәнешле халәт очрагы өчен материалның ныклыгы билгеләнә.

Ныклыкның *классик теорияләре* дип аталган өч теорияне (I, II, III) һәм энергетик (IV) теорияне карап китик.

Ныклык теорияләре гипотезаларга нигезләнәләр, критерийлар материалның җимерелү халәтенә күчү шартларын билгелиләр.

7.2. Ныклыкның классик теорияләре

Ныклыкның I теориясе яки *иң зур нормаль көчәнешләр теориясе* — материалның җимерелүгә китергән сәбәбе ул — аның кайсы да булса төп көчәнешенең куркыныч кыйммәткә җитүе турындагы гипотезага нигезләнә.

Материалның ныклыгын исәпләгән вакытта төп көчәнешләрнең абсолют зурлыгы алына, бу зурлыклар бер күчәрле сузылу һәм кысылу тәҗрибәсеннән алынган σ_{adm} кыйммәтеннән артмаска тиеш.

Материалның сузылу-кысылуга мөмкин саналган σ_{adm} көчәнешләре бертөрле булса (пластик материал), ныклыкның I теориясе буенча ныклык шарты түбәндәгечә языла:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{adm}, \qquad |\sigma_3| \leq \sigma_{adm}.$$

Әгәр $|\sigma_1| > |\sigma_3|$ булса, бу ике формуланың беренчесе кулланыла. Инде $|\sigma_1| < |\sigma_3|$ булса, икенче формула кулланыла.

Әгәр мөмкин саналган көчәнеш сузылуга σ^{c}_{adm} һәм кысылуга σ^{κ}_{adm} төрлечә булса (уалучан материал), ныклык шарты түбәндәгечә языла:

$$\sigma_1 \le \sigma^{c}_{adm}, \qquad |\sigma_3| \le \sigma^{\kappa}_{adm}.$$

Бу формулаларның берсен яки икесен дә куллану көчәнешле халәт төренә бәйле.

Биредә түбәндәге очраклар булырга мөмкин:

а) $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3 \ge 0$ — барлык төп көчәнешләр дә сузылучы, бу вакытта беренче формула кулланыла.

б) $0 \ge \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$ — барлык төп көчәнешләр дә кысылучы, бу вакытта икенче формула кулланыла.

в) $\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$ — ике формуланы да кулланабыз.

Ныклыкның I теориясе уалучан материаллар өчен алынган тәҗрибә нәтиҗәләренә туры килә.

Ныклыкның II теориясе яки иң зур деформацияләр теориясе — материалның сызыкча деформацияләре куркыныч кыйммәткә җиткәндә, материалның җимерелү халәте башлану турындагы гипотезага нигезләнә.

Шуңа күрә, материалның ныклыгын исәпләгәндә, иң зур чагыштырма сызыкча деформация зурлыгын табалар, бу зурлык бер күчәрле көчәнешле халәт өчен тәҗрибә юлы белән табылган мөмкин саналган кыйммәттән артмаска тиеш.

Пластик материал өчен ныклык шарты түбәндәгечә языла:

$$\max|\varepsilon| \leq \varepsilon_{adm}.$$

Гук законы буенча,

$$\varepsilon_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{E}.$$

Әгәр $\max|\varepsilon| = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] > 0$ булса, ныклык шартыннан $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{adm}$ тигезсезлеге килеп чыга.

Кайбер очракларда сузылу һәм кысулу моментында мөмкин булган чагыштырма деформацияләр төрлечә була. Бу очракта уалучан материаллар өчен ныклык шартлары түбәндәгечә языла:

$\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon^{c}_{adm} = \frac{\sigma^{c}_{adm}}{E}$ — сузылганда мөмкин саналган чагыштырма деформация;

$|\varepsilon_{\min}| \leq \varepsilon^{к}_{adm} = \frac{\sigma^{к}_{adm}}{E}$ — кысылганда мөмкин саналган чагыштырма деформация.

Ныклыкның II теориясе уалучан материаллар өчен дөрес нәтиҗәләр бирә.

Ныклыкның III теориясе яки иң зур орынма көчәнешләр теориясе — материалның иң зур орынма көчәнешләре куркыныч кыйммәткә җиткәндә, материалның җимерелү халәте башлану турындагы гипотезага нигезләнә.

Шуңа күрә, материалның ныклыгын исәпләгәндә, иң зур орынма көчәнеш кыйммәтен табалар, бу зурлык бер күчәрле көчәнешле халәт өчен тәҗрибә юлы белән табылган мөмкин саналган кыйммәттән артмаска тиеш. Һәм ныклык шарты түбәндәгечә языла:

$$\tau_{\max} \le \tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2}.$$

Көчәнешле халәтнең гомуми очрагында иң зур орынма көчәнешне исәпләү өчен түбәндәге формула кулланыла:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Моннан:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \le \tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{2},$$

яки

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_{adm}.$$

Ныклыкның III теориясе пластик материаллар өчен тәҗрибәләрдән алынган нәтиҗәләргә туры килә. Уалучан материаллар өчен бу теория кулланылмый.

7.3. Ныклыкның энергетик теориясе

Дүртенче яки энергетик ныклык теориясенең төп гипотезасы материалны куркыныч халәткә җиткерүче чагыштырма потенциаль

энергиянең деформация вакытында форманы үзгәртү белән бәйле өлешен җаваплы дип саный. Ныклык шарты болай языла:

$$u_{ф} < u_{ф}^{к},$$

биредәге тигезсезлеккә кергән форманы үзгәртү потенциаль энергиясе түбәндәгегә тигез:

$$u_{ф} = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

ә аның куркыныч дип саналган зурлыгын сузылган стерженьнан исәпләп табабыз (σ урынына σ_i не куеп):

$$u_{ф}^{к} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_{к}^{2}.$$

Ныклык шартына бу аңлатмаларны кертеп, аны болай яза алабыз:

$$\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] < \frac{1+\mu}{3E}\sigma_{к}^{2},$$

бу тигезләмәне кыскарткач һәм ике ягыннан да квадрат тамыр алгач, ныклык шартын гадәти формага китерәбез:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} < \sigma_{к}.$$

Рөхсәт ителгән көчәнеш түбәндәге формула буенча табыла:

$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{к}}{n}$, биредә n — ныклык запасы коэффициенты.

Димәк, бу теория буенча ныклык шарты түбәндәгечә була:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \le \sigma_{adm}.$$

Дүртенче ныклык теориясе пластик материаллар белән үткәрелгән тәҗрибә нәтиҗәләренә туры килә. Ул пластик материаллар өчен хәзерге көндә иң дөрес теория дип санала.

8. Шуышу деформациясе

8.1. Чиста шуышу турында төшенчә

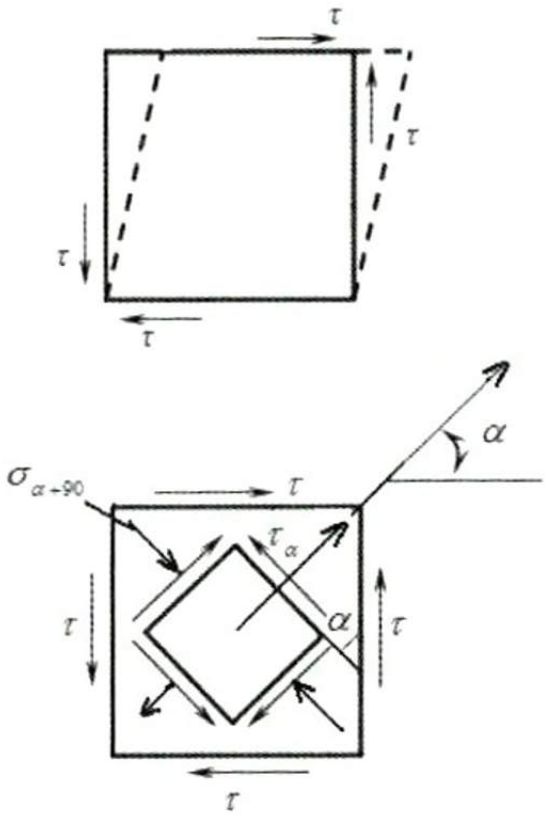
Чиксез кечкенә элементның якларына орынма көчәнешләр генә тәэсир итсә (рәс. 17), яссы көчәнешле халәтнең бу төре *чиста шуышу* дип атала. Ә орынма көчәнешләр тәэсир итә торган мәйданчыклар *чиста шуышу мәйданчыклары* дип атала. Чиста шуышу очрагында нокта тирәсендә алынган турыпочмаклы элемент шуышу деформациясе генә кичерә, ә аның якларының озынлыклары үзгәрми. Чиста шуышу мәйданчыклары бирелгән дип кабул итсәк, $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau$ була, бу очракта яссы көчәнешле халәт формулаларыннан, табабыз:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha,$$

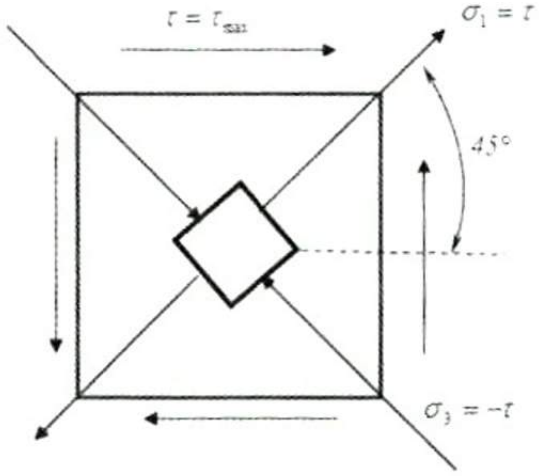
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha,$$

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha \, , \tau_\alpha = -\tau \cos 2\alpha \, .$$

Соңгы ике формуладан күренгәнчә, чиста шуышу мәйданчыгындагы көчәнеш абсолют зурлыклары буенча башка мәйданчыклардагы орынма көчәнешләреннән зуррак була, чөнки $|\cos 2\alpha| \le 1$.



Рәс. 17



Рәс. 18

Шуннан чыгып, тикшерелә торган элементныңякларына тәэсир итүче орынма көчәнешләр экстремаль ($\tau_{\max}$ һәм $\tau_{\min}$) була:

$\sigma_{\alpha=45^0} = \sigma_{\max} = \tau = \tau_{\max}$, $\sigma_{\alpha=-45^0} = \sigma_{\min} = -\tau = -\tau_{\max} = \tau_{\min}$, димәк,

$\sigma_1 = \tau;\ \sigma_2 = 0;\ \sigma_3 = -\tau$.

Чиста шуышуда төп көчәнешләр (кысылучы һәм сузылучы) абсолют зурлыклары буенча үзара тигез һәм экстремаль орынма көчәнешләргә санча тигез булалар. Төп мәйданчыклар чиста шуышу мәйданчыклары белән 45^0лы почмак ясыйлар (рәс. 18).

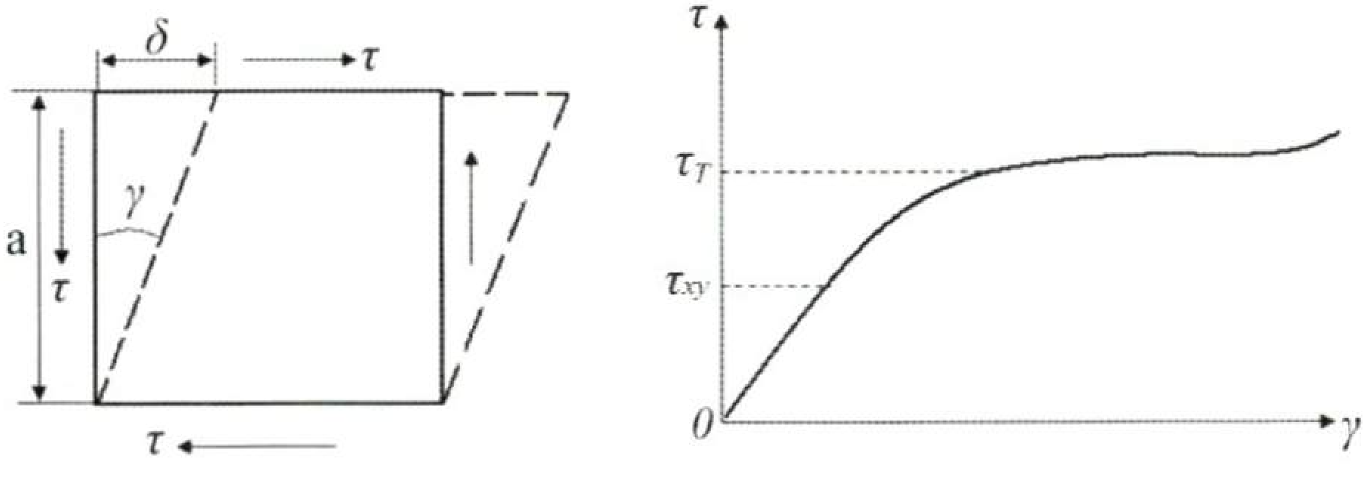
8.2. Саф шуышу очрагында Гук законы

Чиста шуышу мәйданчыклары белән чикләнгән элементның деформациясен карап үтик (рәс. 19). Биредә δ зурлыгын — абсолют шуышу, ә $\gamma = \dfrac{\delta}{a}$ чагыштырмасын *чагыштырмача шуышу* дип атыйлар (бу тигезлек кечкенә деформацияләр өчен генә кулланыла).

Чагыштырмача шуышу деформациясе γ орынма көчәнеш τ га пропорциональ икәнлеге тәҗрибә ярдәмендә ачыклана:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{яки} \quad \tau = G\gamma .$$

Бу чагыштырманы *шуышудагы Гук законы* дип атыйлар. Орынма көчәнеш һәм шуышу почмагы арасындагы пропорциональлек коэффициенты G ны *шуышуның эластиклык модуле яки икенче төрдәге эластиклык модуле* дип йөртәләр.



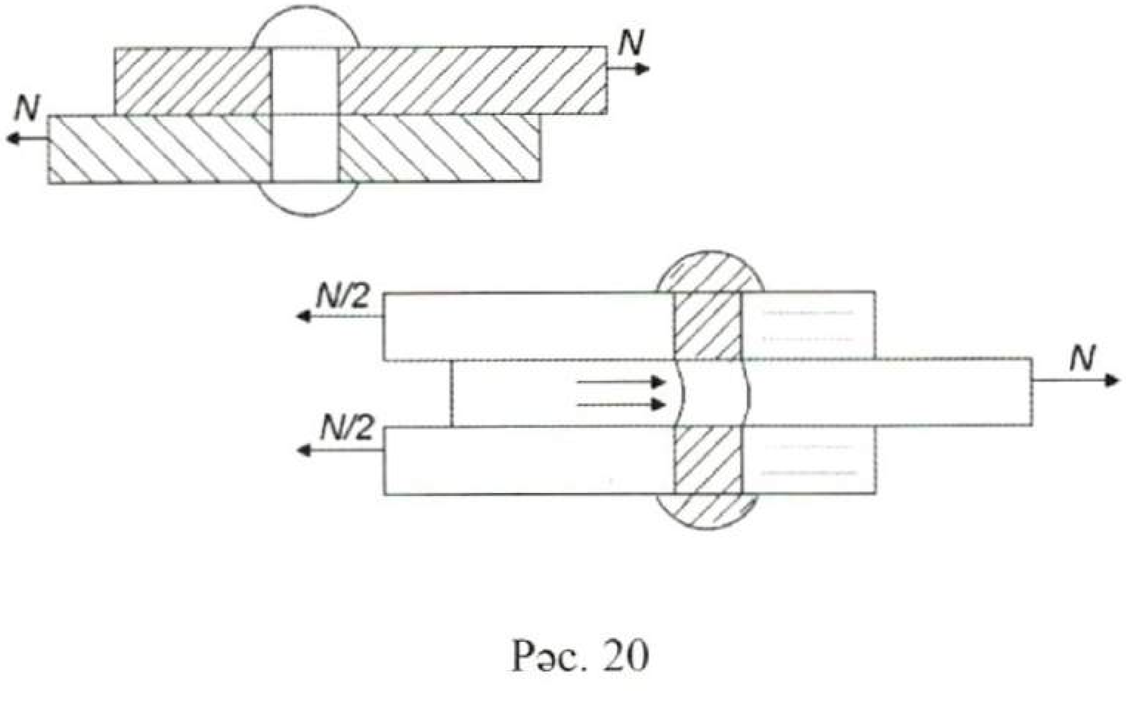
Рәс. 19

Эластиклык модуле $H/мм^2$, $кH/м^2$, МПа һ.б. үлчәү берәмлекләре белән күрсәтелә, мәсәлән, корыч өчен $G = 0{,}8 \cdot 10^5 H/мм^2$. G зурлыгы эксперименталь юл белән табыла.

8.3. Шуышуда катнашучы тоташмаларны практик исәпләү

Кайбер конструкцияләрдә аерым кисемнәр буенча исәпкә алырлык зур орынма көчәнешләр тәэсир итә.

Кагыйдә буларак, бу кисемнәрдә нормаль көчәнешләр дә тәэсир итәләр, шуңа күрә алар чиста шуу мәйданчыклары булып саналмый. Аларда нормаль көчәнешләр орынма көчәнешләргә караганда күпкә кечерәк булганлыктан, якынча исәпләүләрдә бары тик орынма көчәнешләрне генә исәпкә алалар, ә күрсәтелгән кисемнәрне шуышу мәйданчыклары дип карыйлар. Мондый исәпләүләрне *шуышуны (кисүне) исәпләү* дип атыйлар. Зур орынма көчәнешле тоташмалар мисаллары булып *заклёпкалы* (рәс. 20) һәм *эретеп ябыштырулы* (рәс. 21) тоташмалар тора.



Рәс. 20

Шуышу, кисү деформациясен исәпләгәндә, ныклык шарты болай языла: $|\tau| \le \tau_{adm}$,

τ — шуышу (киселү) мәйданчыгында исәпләү көчәнеше, τ_{adm} — рөхсәт ителгән орынма көчәнеш. Заклёпкалы тоташмаларда конструкциянең җимерелүе, шуу мәйданчыгының киселүе тәэсирендә генә түгел, ә башка төр деформация тәэсирендә дә булырга мөмкин.

Аерым очракта, заклёпкалы тоташманың җимерелү сәбәбе булып, заклёпканың цилиндрик өслегенең деформацияләнүе торырга мөмкин (рәс. 20). Бу очракта ныклык шарты түбәндәгечә языла:

$$\sigma^{u} \leq \sigma^{u}_{adm},$$

биредә σ^{u} — заклёпканың изелүен исәпләүдәге нормаль көчәнеше, σ^{u}_{adm} — заклёпканың изелүгә карата рөхсәт ителгән нормаль көчәнеше.

Конструкцияләр рәтендәге аерым үлчәмнәр арасындагы чагыштырмалар махсус нормалар белән билгеләнәләр: n — заклёпкалар саны, m — һәр заклёпканы кисү яссылыклары саны, δ — фасонлы табак калынлыгы, d — заклёпканың диаметры.

Заклёпкаларның киселү яссылыклары буенча орынма көчәнешләр һәм заклёпка таякчыгының фасонлы табакның белән тәэсирләшү мәйданчыгының изелү көчәнешләре түбәндәгечә билгеләнә:

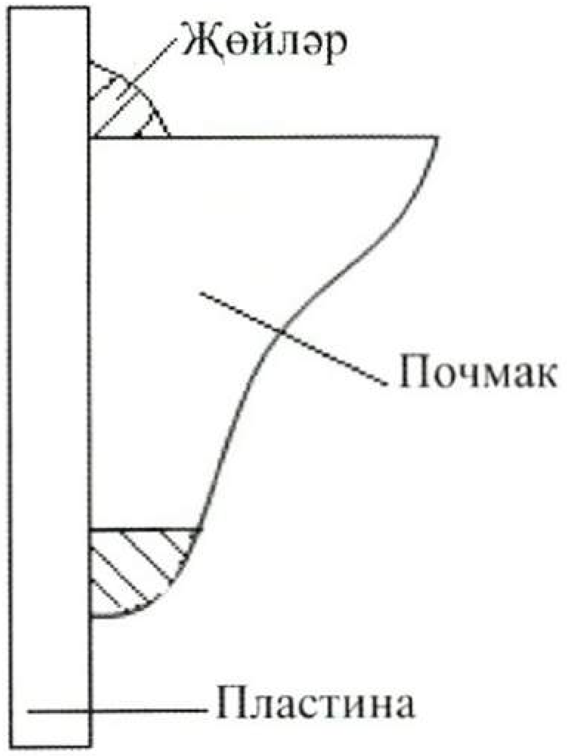
$$\tau = \frac{N}{n\frac{\pi d^2}{4}m}, \qquad \sigma^{u} = \frac{N}{n\delta d}.$$

Бу формулалар буенча исәпләнгән τ һәм $\sigma^{и}$ көчәнешләре ныклык шартларын канәгатьләндерергә тиеш, һәм моннан заклёпканың кирәкле диаметрын яки заклепкалар санын табарга мөмкин.

Эретеп ябыштырыла торган тоташмалар өчен флангтагы җөйнең ныклык шарты түбәндәгечә языла:

$$\tau = \frac{N}{l0,7h} \leq \tau_{adm}^{ж},$$

биредә N — җөйгә тәэсир итүче көч, l — җөйнең озынлыгы, h — җөйнең биеклеге, $0,7h$ — кисү мәйданчыгының иң кечкенә калынлыгы, $\tau_{adm}^{ж}$ — җөйнең киселүгә карата рөхсәт ителгән көчәнеше.



Рәс. 21

Бу шарт буенча җөйнең кирәкле озынлыгын табарга мөмкин:

$$l = \frac{N}{0,7\tau_{adm}^{ж} h}.$$

9. Яссы кисемнәрнең геометрик характеристикалары

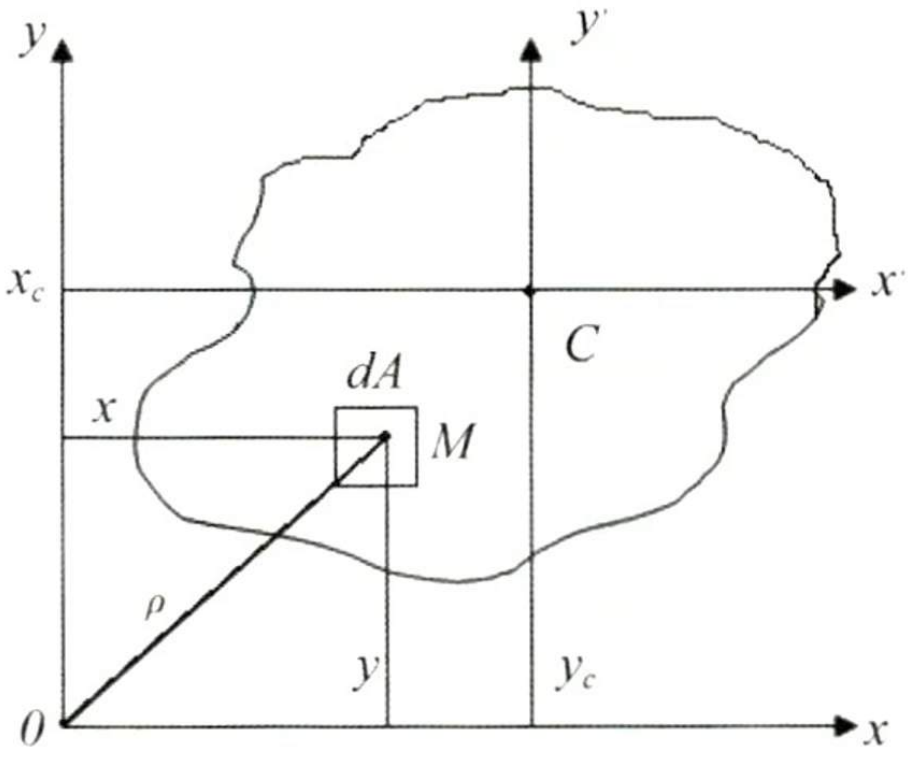
Моңа кадәр без сузылу-кысылу һәм шуу деформацияләренә мисаллар карап үткән идек. Аннан башка тагын ике төрле төп деформация бар: *бөгү* һәм *бөтеру*.

Бөгү, бөтерүгә караган мәсьәләләрне чишү өчен, безгә геометриядән кайбер яңа төшенчәләр алырга кирәк булыр. Аларны мәйдан төшенчәсеннән башлап җибәрик. Шунысын онытмыйк: мәйдан һәрвакыт уңай һәм координаталар системасыннан бәйсез була. Мәйданнан тыш, фигураның (кисемнең) статик һәм инерция моментлары төшенчәләрен куллана белергә кирәк.

9.1. Яссы кисемнәрнең статик моментлары

Турыпочмаклы координаталар системасында бер фигура (бер стерженьның аркылы кисеме) бирелгән (рәс. 22). Аның эчендә *M(x,y)* ноктасы янында элементар мәйдан *dA* бар. Шул элементар мәйданны *y* координатына тапкырлап, мондый интеграл алыйк:

$$S_x = \int_A y dA,$$



Рәс. 22

бу интеграл x күчәренә карата статик момент була, ә $S_y = \int_A x dA$ интегралы y күчәренә карата *статик момент* дип атала. Статик моментның үлчәү берәмлекләре м^3, см^3, мм^3 була.

Статик момент, координаталар сызыкларының урнашуына карап, уңай, тискәре һәм нульгә тигез булырга мөмкин.

Яссы фигураның авырлык үзәге координаталары x_c һәм y_c булса,

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}$$

тигезлекләре дөрес булыр.

Әгәр x һәм y күчәрләре фигураның авырлык үзәге аша узса, статик моментлар нульгә тигез була: $S_x = 0$, $S_y = 0$, чөнки бу очракта $x_c = 0$ һәм $y_c = 0$. Мондый күчәрләрне *үзәк күчәрләр* дип атыйлар.

9.2. Яссы кисемнәрнең инерция моментлары

$$J_x = \int_A y^2 dA \quad \text{яки} \quad J_y = \int_A x^2 dA$$

интеграллары белән билгеләнә торган зурлыклар фигура мәйданчыгының (рәс. 22) x күчәренә карата (J_x) яки y күчәренә карата (J_y) *күчәрле (экваториаль) инерция моментлары* дип аталалар. Кисемнең поляр инерция моменты дип

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

интегралы атала, бу формулада $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Шуңа күрә $J_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_x + J_y$.

Күчәрле һәм поляр инерция моментлары һәрвакыт уңай була:

$$J_{xy} = \int_A xy dA,$$

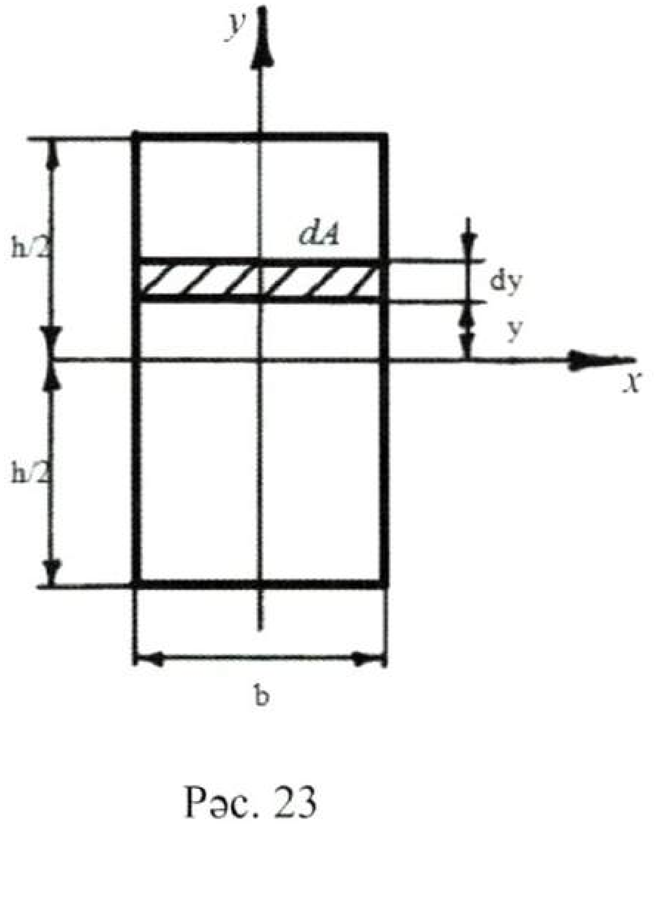
бу интеграл *үзәктән куу инерция моменты* дип атала. Ул элементар мәйданчыкларның x, y координаталар күчәрләреннән ераклыклары тапкырчыгышының суммасына тигез була. Урнашуга һәм координаталар күчәрләрен сайлауга бәйле рәвештә, үзәктән куу моменты уңай, тискәре һәм нульгә тигез булырга мөмкин. Үзәктән куу моменты $J_{xy} = 0$ булган күчәрләрне *төп күчәрләр* дип атыйлар. Әгәр бу күчәрләрнең координаталар башлангычы фигура мәйданчыгының авырлык үзәгендә булса, аларны *төп үзәк күчәрләр* дип йөртәләр. Әгәр үзара перпендикуляр булган x, y күчәрләренең берсе фигураның симметрия күчәре булса, мондый

күчәрләргә карата үзәктән куу моменты $J_{xy} = 0$ була, андый күчәрләр *төп күчәрләр* була.

Инерция моментлары J_x, J_y, J_ρ, J_{xy} үлчәү берәмлекләре $м^4$, $см^4$ яки $мм^4$ белән күрсәтелә.

9.3. Гади фигураларның инерция моментлары

Турыпочмаклык. Турыпочмаклыкның x һәм y үзәк сызыкларына карата экваториаль инерция моментларын табарга. Турыпочмаклыкның (рәс. 23) зурлыклары b һәм h булсын, ди. Элементар мәйданны тар тасма формасында алып ($dA = bdy$), аның инерция моментын табабыз:

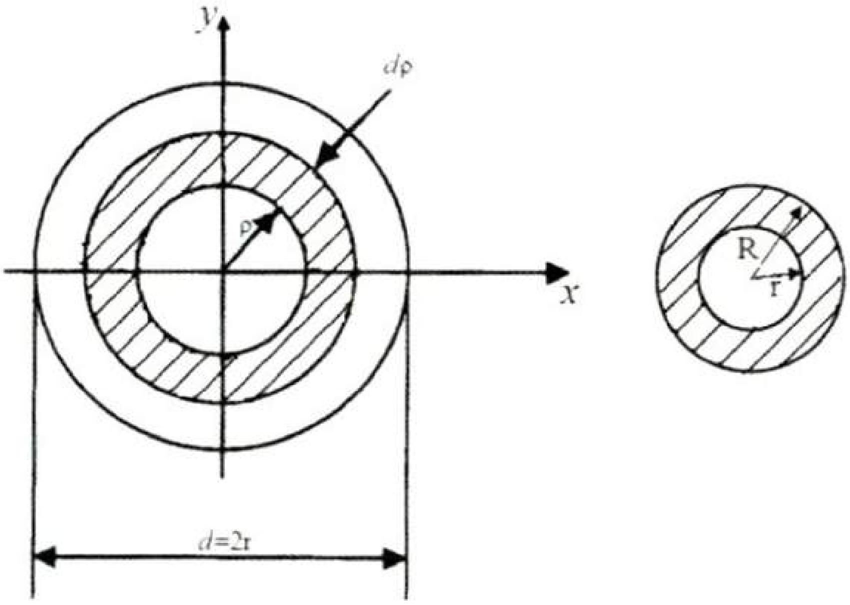


Рәс. 23

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

Шулай итеп, $J_x = \dfrac{bh^3}{12}$, $J_y = \dfrac{b^3 h}{12}$. Әлбәттә, $J_{xy} = 0$.

Түгәрәк. Кисем симметрик булганга күрә, $J_x = J_y$. Моннан тыш $J_x + J_y = J_\rho$ булганлыктан, $J_x = J_y = J_\rho / 2$.



Рәс. 24

Башта поляр инерция моментын табабыз. Элементар dA мәйданын тар боҗра формасында бүлеп алабыз (рәс. 24), бу очракта:

$$dA = 2\pi\rho d\rho \text{ һәм } J_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho d\rho = \pi\frac{\rho^4}{2}\cdot\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Шулай итеп, $J_\rho = \dfrac{\pi R^4}{2} = \dfrac{\pi D^4}{32}$, ә экваториаль моментлар

$$J_x = J_y = \frac{J_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}.$$

Божра (көпшә, торба кисеме). Тышкы радиусы *R*, эчке радиусы *r*.

Бу очракта формула түгәрәк өчен кебек чыгарыла. Интеграл алып табабыз (аның чикләре генә башка: түгәрәк өчен алар 0 дән *R* га кадәр булса, божра өчен *r* дан *R* га кадәр):

$$J_\rho = \frac{\pi\rho^4}{2}\Big|_r^R = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi R^4}{2}\left(1-c^4\right), \text{ биредә } c = \frac{r}{R} = \frac{d}{D}.$$

Шулай итеп,

$$J_\rho = \frac{\pi R^4}{2}\left(1-c^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-c^4\right),$$

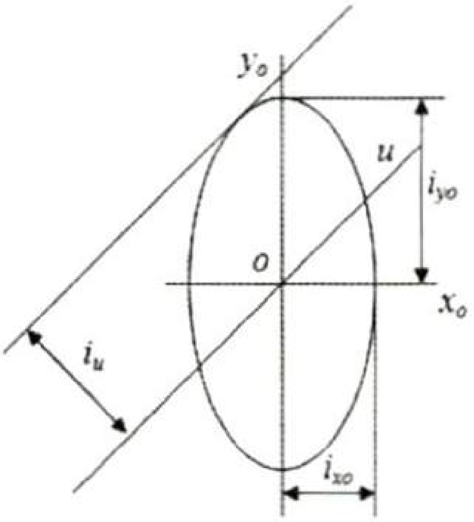
$$J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4}\left(1-c^4\right) = \frac{\pi D^4}{64}\left(1-c^4\right).$$

Катлаулы формадагы кисемнәргә карата анык интеграллар өчен булган кагыйдәне кулланыйк: катлаулы формалы кисемнең бирелгән сызыкка карата инерция моментын билгеләү өчен, ул кисемне гади фигураларга бүлеп, һәрбер гади фигураның бирелгән сызыкка карата инерция моментын билгеләргә һәм исәпләү нәтиҗәләрен кушарга.

9.4. Инерция радиуслары

Мондый зурлыкларны $i_{xo} = \sqrt{\dfrac{J_{xo}}{A}}$, $i_{yo} = \sqrt{\dfrac{J_{yo}}{A}}$ *төп инерция радиуслары* дип атыйк. Аларны x_0, y_0 сызыкларына төшереп (i_{xo} – y_0 сызыгына, i_{yo} – x_0 сызыгына), эллипс төзибез (рәс. 25). Ул *инерция эллипсы* дип атала. Эллипстан теләсә нинди үзәк сызык өчен инерция моментын табып була.

Мәсәлән, J_u ны табу өчен, эллипска шул сызыкка параллель



Рәс. 25

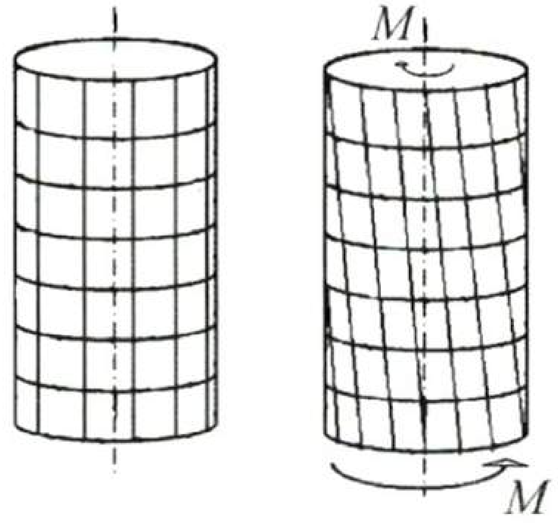
орынма төзибез, ул орынма белән *u* сызыгы арасын үлчибез, һәм $J_u = i^2_u A$ формуласыннан J_u зурлыгын исәпләп табабыз.

10. Аркылы кисеме түгәрәк булган стерженьны бөтерү

Стерженьның аркылы кисемнәрендә бөтерү моменты гына барлыкка килсә, ул *бөтерелү деформациясе* дип атала, бу очракта

башка эчке көчләрнең факторлары (бөгү моментлары, нормаль һәм аркылы көчләр) нульгә тигез була. Бөтерү моментлары тәэсирендә барлыкка килгән көчәнешләрне һәм деформацияләрне ачыкларга кирәк (аларның зурлыклары бөтерү моментына гына түгел, ә стерженьның аркылы кисеменең формасына да бәйле). Иң гади чишелеш түгәрәк кисемле стержень өчен була.

10.1. Аркылы кисеме түгәрәк булган стерженьны бөтергәндә көчәнешләр һәм деформацияләр



Рәс. 26

Аркылы кисеме түгәрәк булган стерженьның ян өслегенә турыпочмаклы челтәр салабыз: челтәр буй сызыклар һәм әйләнмәләр системасыннан тора. Бөтерелгәннән соң (рәс. 26), челтәр барлыкка китергән турыпочмаклыклар кыйшая, стерженьның буй күчәре турысызыклы килеш, ә аркылы кисеме деформациядән соң да шундый ук яссы формада кала. Бөтерелгәндә параллель аркылы кисемнәр бер-берсенә карата *бөтерелү почмагы* дип аталган почмакка

борылалар. Аркылы кисемнәр арасындагы ераклык үзгәрешсез кала, димәк, буй җепселләр озынаймыйлар да, кыскармыйлар да.

Экспериментларга таянып, бөтерелгәндә аркылы кисеме түгәрәк булган стерженьның деформациясе характеры турында түбәндәгеләрне әйтергә мөмкин:

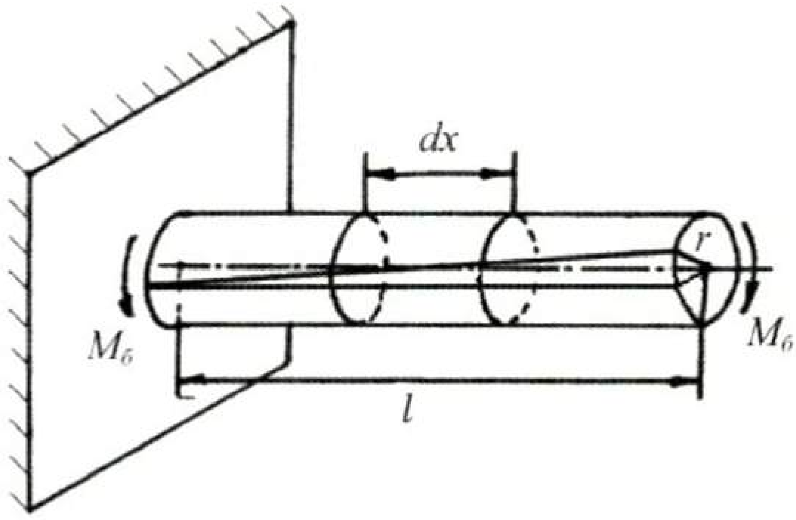
1. Деформация процессында барлык аркылы кисемнәр яссы булып кала.

2. Деформация процессында аркылы кисемнәрдәге радиуслар туры булып кала.

3. Аркылы кисеме түгәрәк булган стержень бөтерелгәндә, аркылы кисемнәр арасындагы ераклыклар үзгәрми, алар, бер-берсенә карата борылып, якынаймыйлар. Бу гипотезалар нигезендә, яссы кисемнәр чиста шуышу деформацияләре нәтиҗәләрендә күчәләр дип әйтә алабыз.

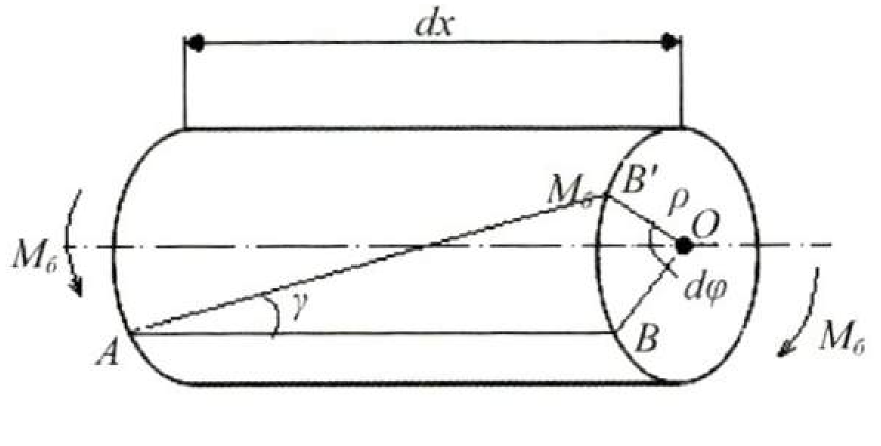
Озынлыгы l, аркылы кисеме r радиуслы түгәрәк булган туры стерженьны алыйк (рәс. 27), аның бер очы беркетелгән була, ә икенче очына бөтерү моменты $M_б$ тәэсир итә. Бу моментның тәэсире нәтиҗәсендә стерженьның уң як башының кисеме сул як башына карата φ почмагына борыла, ул *бөтерелүнең тулы почмагы* дип атала.

Стерженьның dx аралыгындагы ике аркылы кисемнәре бер-берсенә карата $d\varphi$ почмагына борылалар. Шул $d\varphi$ почмагының dx аралыгына чагыштырмасы *бөтерелүнең чагыштырма почмагы* дип атала : $\theta = \dfrac{d\varphi}{dx}$.



Рәс. 27

Стерженьнан озынлыгы dx булган чиксез кечкенә элементны аерып алыйк. 28 нче рәсемдә сурәтләнгәнчә, цилиндрның AB кисемтәсе γ почмагына борыла. $\Delta ABB'$ ын һәм OBB' секторын карыйбыз: беренче өчпочмактан $BB' = \gamma dx$, OBB' секторыннан $BB' = \rho d\varphi$ $(0 < \rho < r)$.



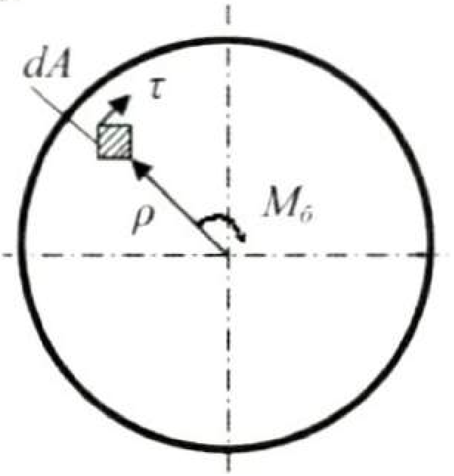
Рәс. 28

Димәк: $\gamma dx = \rho d\varphi$ яки $\gamma = \rho \dfrac{d\varphi}{dx}$ ($0 \le \rho \le r$).

$\theta = \dfrac{d\varphi}{dx}$ — бөтерелүнең чагыштырма почмагы икәнен исәпкә алып, $\gamma = \rho\theta$ икәнен табабыз.

Чиста шуышу өчен Гук законыннан $\tau = G\gamma = G\rho\theta$ икәне килеп чыга.

Стерженьның аркылы кисемендә $M_б$ бөтерү моменты тәэсир итә, ул тышкы моментка тигез.



Рәс. 29

Аркылы кисемдә элементар мәйдан dA ны бүлеп алыйк (рәс. 29), шул мәйданда тәэсир иткән орынма көчәнешне күрсәтәбез. Аның юнәлеше радиуска перпендикуляр. Көчәнешне dA мәйданына тапкырлап, элементар көчне табабыз: τdA. Бу көчне радиуска (иңсәсенә) тапкырлап, шул көчнең моментын табабыз: $\tau dA\rho$. Әлеге моментларны бөтен кисем өслегеннән җыеп (интеграл исәпләсәк), кисемдәге бөтерү моментын табабыз: $M_б = \int\limits_A \tau\rho dA$.

Гук законындагы, көчәнеш τ урынына $G\rho\theta$ куеп, түбәндәге формуланы табабыз:

$$M_{б} = \int_A \rho^2 \theta G dA = \theta G \int_A \rho^2 dA = J_{\rho} \theta G \text{ ,}$$

биредә $J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA$ — поляр инерция моменты.

Шул формуладан $\theta = \frac{M_б}{GJ_{\rho}}$ килеп чыга.

Бөтерелүнең чагыштырма почмагы формуласын исәпкә алсак,

$$d\varphi = \frac{M_б dx}{GJ_{\rho}}$$

икәне чыга, аннан интеграл алып табабыз:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_б}{GJ_{\rho}} dx \text{ .}$$

GJ_{ρ} — *бөтерүгә каршы катылык* дип атала. Әгәр бөтерелү моменты $M_б$ һәм катылык стерженьның күчәре буенча үзгәрмәсә, φ түбәндәгечә була:

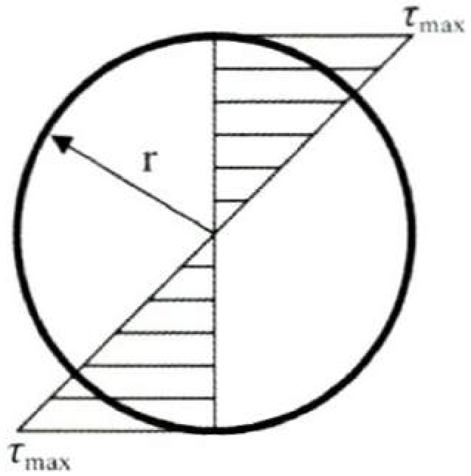
$$\varphi = \frac{M_б l}{GJ_{\rho}} \text{ ,}$$

биредә φ — $M_б$ тәэсирендә l озынлыгындагы стерженьның тулы бөтерелү почмагы. Орынма көчәнешне бөтерү моменты аша күрсәтик:

$$\tau = \frac{M_б \rho}{J_{\rho}} \text{ .}$$

Бу тигезлектән күренгәнчә, орынма көчәнешләр үзләре барлыкка килгән ноктадан аркылы кисем үзәгенә кадәрге ераклыкка пропорциональ була.

30 нчы рәсемдә τ эпюрасы сурәтләнгән, максималь орынма көчәнеш болай языла: $\tau_{max} = \dfrac{M_б \rho_{max}}{J_\rho}$



Рәс. 30

$\rho_{max} = r$ булганда, бу фомуланы түбәндәгечә язып була:

$$\tau_{max} = \frac{M_б r}{J_\rho} = \frac{M_б}{W_\rho}.$$

$W_\rho = \dfrac{J_\rho}{r}$ зурлыгы *поляр каршылык моменты* дип атала. Мәсәлән, түгәрәк өчен:

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4,$$

шуңа күрә

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

Божра өчен:

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-c^4\right),$$

эчке диаметр $d = cD$ булганлыктан,

$$W_\rho = 0,2D^3\left(1-c^4\right).$$

10.2. Аркылы киселе түгәрәк булган борысны бөтергәндә, аның ныклыгын һәм катылыгын исәпләү

Аркылы киселе түгәрәк булган борысның ныклыгын исәпләгәндә, түбәндәге шарт үтәлергә тиеш:

$$\tau_{\max} = \frac{M_б}{W_\rho} \le \tau_{adm},$$

биредә τ_{adm} — бөтергәндә рөхсәт ителгән көчәнеш. Поляр каршылык моменты $W_\rho \approx 0,2d^3$ икәнен исәпкә алсак, борысның ныклык диаметры түбәндәге формула буенча табыла:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{M_б}{0,2\tau_{adm}}} = 1,71\sqrt[3]{\frac{M_б}{\tau_{adm}}}.$$

Катылыкны исәпләгәндә, түбәндәге шарт үтәлергә тиеш:

$$\theta = \frac{M_{бр}}{G \cdot J_P} \le \theta_{adm},$$

биредә θ_{adm} кисемнең рөхсәт ителгән борылу почмагы, ул борысның озынлык берәмлегендә радианнар белән күрсәтелә (төрле конструкцияләр өчен борысның 1м озынлыгы 0,00262дән 0,0349га кадәргә туры килә).

Түгәрәк өчен $J_p = 0{,}1d^4$ икәнен исәпкә алсак, катылыкны исәпләгәндә борысның мөмкин саналган диаметры түбәндәгечә була:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{M_{бр}}{G\theta_{adm}}}\,.$$

Гадәттә борысның диаметрын аның ныклыгын исәпләүдән чыгып билгелиләр. Әгәр борысның эш шартлары катылыкны исәпләүне дә таләп итсә, диаметрны алда бирелгән формулалар буенча исәплиләр һәм табылган кыйммәтләрнең зуррагын алалар.

Бөтерүче момент M(Н·м) һәм борысның почмакча тизлеге n(әйл/мин) һәм егәрлек N арасындагы түбәндәге бәйлелекләр бар:

$M = 71620N/n$ — әгәр N ат көчләрендә бирелсә,

$M = 97360N/n$ — әгәр N киловаттларда бирелсә.

Халыкара берәмлекләр системасында (СИ) көч моменты M(Н·м), почмакча тизлек ω (рад/сек), егәрлек N(Вт) арасындагы бәйлелек

$$M = N/\omega$$

формуласы белән күрсәтелә.

10.3. Бөтерү деформациясенең потенциаль энергиясе

Борыстан ике аркылы кисем белән dx озынлыгындагы элемент бүлеп алыйк, аның ике ягында бөтерү моменты $M_б$ тәэсир итә. Ул ике кисем бер-берсенә карата $d\varphi$ почмагына борылалар. Шул почмакча көчештә $M_б$ эш башкара, аның зурлыгы түбәндәгечә:

$$dA_{эш} = \frac{1}{2} M_б d\varphi,$$

биредә $d\varphi$ урынына аның аңлатмасын куеп табабыз:

$$d\varphi = \frac{M_б}{GJ_\rho} dx.$$

Борыс буйлап интеграл алсак, ул эшнең зурлыгын табабыз:

$$A_{эш} = \int_l dA_{эш} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_б^2 dx}{GJ_\rho};$$

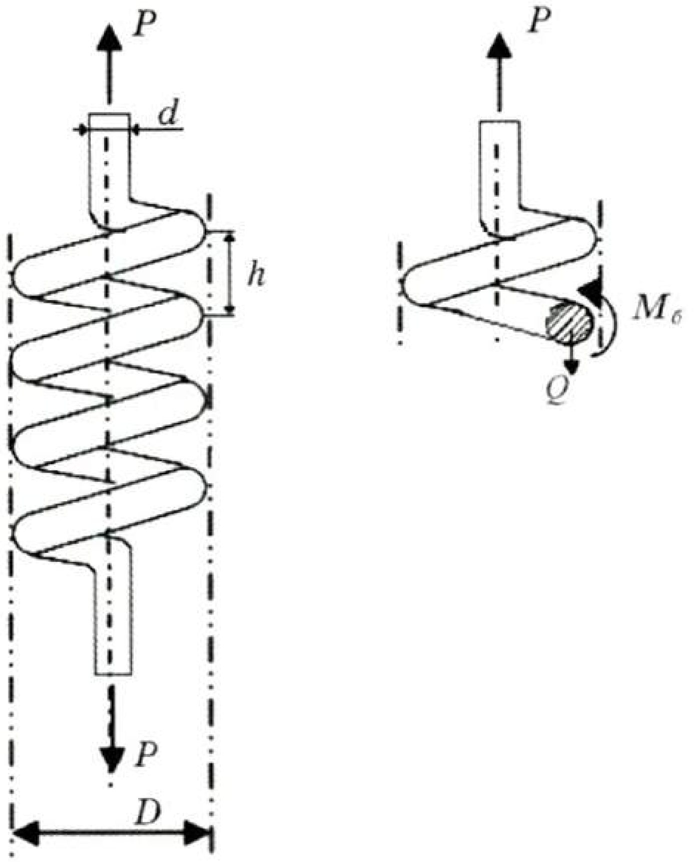
$$M_б = \text{const}, GJ_\rho = \text{const} \text{ булса,}$$

$$A_{эш} = \frac{M_б^2 l}{2GJ_\rho}.$$

Сузу-кысуны өйрәнгәндә күренгәнчә, потенциаль энергия эшнең зурлыгына тигез була:

$$U = A_{эш} = \frac{M_б^2 l}{2GJ_\rho}.$$

10.4. Винтсыман пружиналарны исәпләү



Рәс. 31

Вак адымлы винтсыман пружиналарны исәпләү дә бөтерү схемасына кайтып кала. Сузу пружинасын тикшереп карыйк. Пружинаның уртача диаметры D, металлчыбыкның диаметры d, адымы h (рәс. 31), пружинаның адымы кечкенә, чөнки

$$\alpha = arctg\frac{h}{\pi D} \leq 5^0 .$$

Кисем методы буенча, эчке көч факторларын билгелик. Пружинаның аркылы кисемендә (винт булганда вертикаль кисем белән аркылы кисемнең аермасы кечкенә) аркылы көч $Q = P$ һәм

бөтерү моменты $$M_б = P\frac{D}{2}$$

барлыкка килә. Алар икесе дә орынма көчәнеш тудыра:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{A} + \frac{M_б}{W_p}.$$

Бу формулага Q, A, $M_б$, W_p урынына аларның аңлатмаларын куябыз:

$$A = \frac{\pi d^2}{4},\ W_p = \frac{\pi d^3}{16},\ Q = P,\ M_б = P\frac{D}{2}.$$

Максималь орынма көчәнешне мондый формуладан табабыз:

$$\tau_{\max} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d}{D}\right).$$

Пружинаның ныклыгын исәпләгәндә, гадиләштерелгән формула кулланалар: $\tau_{\max} = \dfrac{8PD}{\pi d^3} \le \tau_{adm}$.

Пружинаның кыскаруын яки озынаюын исәплик. Аны λ хәрефе белән тамгалыйлар. Пружинаның утыруын аның потенциаль энергиясенең тышкы көчләр эше белән тигезлегеннән табабыз:

$$U = A_{эш}.$$

Тышкы көчләр эше $A_{эш} = \dfrac{1}{2}P\lambda$, пружинада җыелган потенциаль энергия $U = \dfrac{M_б^2 l}{2GJ_p}$, биредә $M_б = PD/2$, $l = \pi Dn$, $J_p = \pi d^4/32$,

аларны U аңлатмасына куеп (n – пружинаның бормалары саны), шундый аңлатма табабыз:

$$U = \frac{\left(PD/2\right)^2 \pi D n}{2G\pi d^4/32} = \frac{4P^2D^3n}{Gd^4}.$$

Алда билгеле булган

$$U = A_{\text{эш}}$$

тигезләмәсенә кайтсак, түбәндәге формула килеп чыга:

$$\frac{4P^2D^3n}{Gd^4} = \frac{1}{2}P\lambda.$$

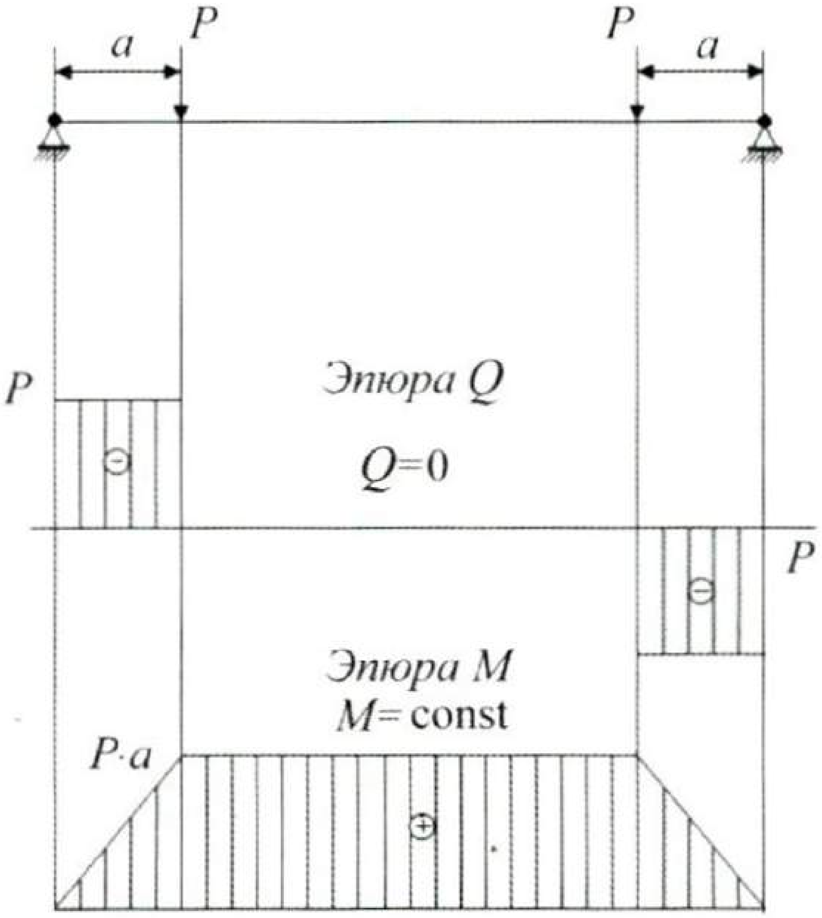
Шул формуладан пружинаның кыскаруын яки озынаюын табабыз:

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4}.$$

11. Яссы бөгү

Әгәр борысның аркылы кисемнәрендә бөгүче моментлар барлыкка килсә, йөкләнеш куелуның мондый төре *бөгү* дип атала. Борысның аркылы кисемнәрендә бөтерү моментлары, аркылы һәм буй көчләр нульгә тигез булса, мондый төр бөгү *саф бөгү* дип атала. Әгәр йөкләнешләрнең тәэсир итү яссылыгы борысның аркылы кисеменең төп үзәк инерция күчәре аша узса, бу *яссы бөгү* дип атала. Бөгүдә катнашучы борыс *балка* дип атала.

11.1. Саф бөгү. Нормаль көчәнешләрне билгеләү



Рәс. 32

Яссы бөгүдә көчәнешле халәтне өйрәнүне саф бөгүдән башлау уңайлырак. 32 нче рәсемдә сурәтләнгән балканың урта өлеше саф бөгү мисалы булып тора ($Q = 0$, $M = \mathrm{const}$).

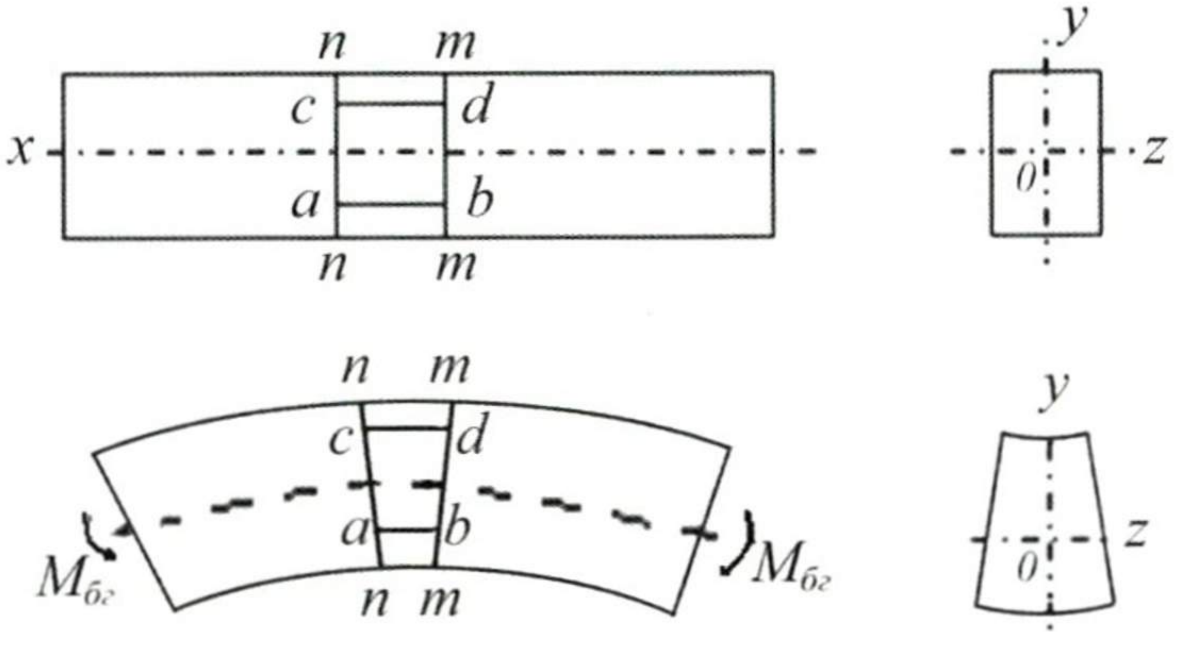
Сен-Венан (1797—1886) беренчеләрдән булып балканың бөгү теориясе нигезендә ятучы күренешләрне ачыклый.

1. Балканың аркылы кисемнәре деформацияләнгәндә яссы булып калалар.

2. Балканың буй җепселләре буйга сузылу яки кысылу халәтендә булалар, бу вакытта алар бер-берсенә басым ясамыйлар. Ул бу

ике күренешнең бары тик саф бөгү очрагында гына үтәлүен исбатлый.

Көчәнеш формулаларын чыгарганчы, сынау нәтиҗәләренә тукталып үтик. Аркылы кисеме турыпочмаклы булган балканың күчәренә перпендикуляр *nn* һәм *mm* кисемнәрен үткәрик (рәс. 33). Аннан соң балканың күчәренә параллель *ab, cd* җепселләрен үткәрик. Балканы вертикаль симметрия яссылыгында тышкы момент *M* белән йөкләп бөгәбез һәм ясалган рәсемнең үзгәрешен күзәтәбез. Йөкләгәндә, балканың өске яки аскы ягында буй һәм аркылы деформацияләрен үлчибез. Күзәтү мондый нәтиҗәләргә китерә:



Рәс. 33

1) *nn* һәм *mm* сызыклары туры булып калалар; алар бер-берсенә карата берникадәр зурлыктагы почмакка авышалар;

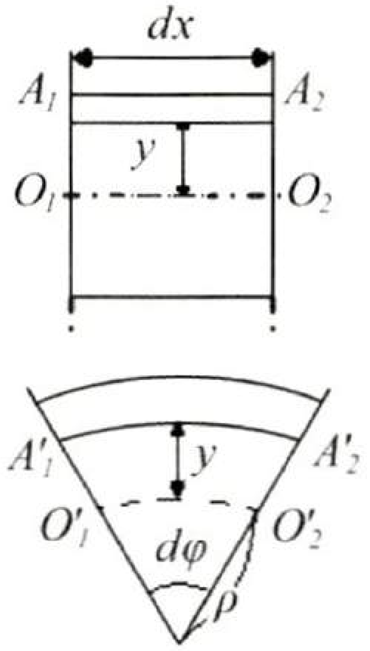
2) *ab* кисемтәсе кыскара, *cd* кисемтәсе озыная;

3) балканың аркылы киседе вертикаль сызыкка карата симметрик булып кала, өстәге ягы киңәя, астагысы тарая. Аркылыга һәм буйга булган деформацияләр бер-берсе белән түбәндәгечә бәйләнгән:

$$\varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x .$$

Нәтиҗәләрнең беренчесе балканың аркылы кисемнәре яссы булып калуын күрсәтә. Икенче нәтиҗә буенча балканың өстәге өлеше кысыла, астагысы — сузыла, балканың уртасында деформациясе нульгә тигез булган катлау бар. Аны *нейтраль катлау* дип атыйлар. Нейтраль катлауның аркылы кисем яссылыгы белән кисешү сызыгы *нейтраль сызык* дип атала. Өченче нәтиҗәдән саф бөгү очрагында материалның бер үлчәмле көчәнешле халәттә булуын күрәбез, димәк, нормаль көчәнешләрдән σ гына бар.

Балкадан dx озынлыгындагы элемент бүлеп алабыз. O_1O_2 кисемтәсе нейтраль яссылыкныкы булсын, ә A_1A_2 кисемтәсе аннан y ераклыгында урнашкан итеп алабыз. Балка бөгелгәннән соң, элементның вертикаль яклары бер-берсенә карата $d\varphi$ почмагына авышалар. O_1O_2 кисемтәсе, кәкрәеп, $O_1'O_2'$ ка әверелә һәм $O_1'O_2' = O_1O_2$ була, аның дугасының радиусын ρ дип билгелибез.



Рәс. 34

Шул ук вакытта A_1A_2 кисемтәсе дә $A_1'A_2'$ дугасына әйләнә, аның радиусы $\rho + y$ була.

Деформациягә кадәр $A_1A_2 = O_1O_2 = O_1'O_2' = \rho d\varphi$, деформациядән соң $A_1'A_2' = (\rho + y)d\varphi$ була. Ахырдан A_1A_2 кисемтәсенең деформациясен табабыз:

$$\varepsilon_x = \frac{A_1'A_2' - A_1A_2}{A_1A_2} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}, \quad \varepsilon_x = \frac{y}{\rho}.$$

Гук законы буенча, $\sigma_x = E\varepsilon_x$, димәк, $\sigma_x = E\dfrac{y}{\rho}$.

Нейтраль сызыкның урнашу урынын билгелик, һәм аннан y ераклыгын үлчәргә мөмкин. Аның өчен түбәндәге тигезләмәне кулланабыз (ул саф бөгү очрагында дөрес):

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0,$$

ягъни $N = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = 0$.

Интеграл астындагы $\frac{E}{\rho}$ чагыштырмасы нульгә тигез түгел, шуңа

күрә: $$\int_A y dA = 0.$$

Килеп чыккан интеграл Oz нейтраль күчәренә карата мәйданның статик моментының нульгә тигезлеген күрсәтә. Димәк, борысның саф бөгү деформациясендә нейтраль күчәр кисемнең авырлык үзәге аша үтә.

Хәзер Oz нейтраль күчәренә карата эчке көчнең моментын табабыз:

$$M_z = \int_A (\sigma_x dA) y = \int_A \sigma_x y dA.$$

Югарыда күрсәтелгән көчәнешкә σ_x ның аңлатмасын куеп,

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$ икәнен табабыз.

Бу формуладагы интеграл борысның аркылы кисеменең экваториаль инерция моменты була:

$$\int_A y^2 dA = J_z,$$

шунлыктан $$M_z = \frac{EJ_z}{\rho}.$$

Моннан балканың нейтраль күчәренең кәкрелеген табабыз:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_z}{EJ_z},$$

биредә EJ_z *бөгүгә карата катылык* дип атала.

Кәкрелекнең аңлатмасын көчәнеш σ_xны табу формуласына куйсак, нормаль көчәнеш аңлатмасын табабыз:

$$\sigma_x=Ey\frac{1}{\rho}=Ey\frac{M_z}{EJ_z}=\frac{M_z}{J_z}y, \text{ ягъни } \sigma_x=\frac{M_z}{J_z}y.$$

Бу формула борысның аркылы кисемендә ятучы нейтраль күчәрдән y ераклыгында урнашкан теләсә нинди ноктадагы көчәнешне табарга ярдәм итә. Без аны чыгарганда стерженьның аркылы кисеме Oy күчәренә карата симметрияле була дип фаразладык. Бу фаразлау бары тик уңай фикер йөртү өчен генә кулланылды. Әлеге формуланы теләсә нинди аркылы кисем өчен кулланырга мөмкин, ләкин төп инерция күчәренең берсе авырлык яссылыгында ятарга тиеш, ә икенчесе бөгү үзәге аша үтәргә тиеш.

Исбатлау өчен барлык элементар көчләрнең Oy күчәренә карата моментларын нульгә тигезлибез:

$$M_y=\int_A(\sigma_x dA)z=\int_A\frac{E}{\rho}yzdA=\frac{E}{\rho}\int_A zydA=0,$$

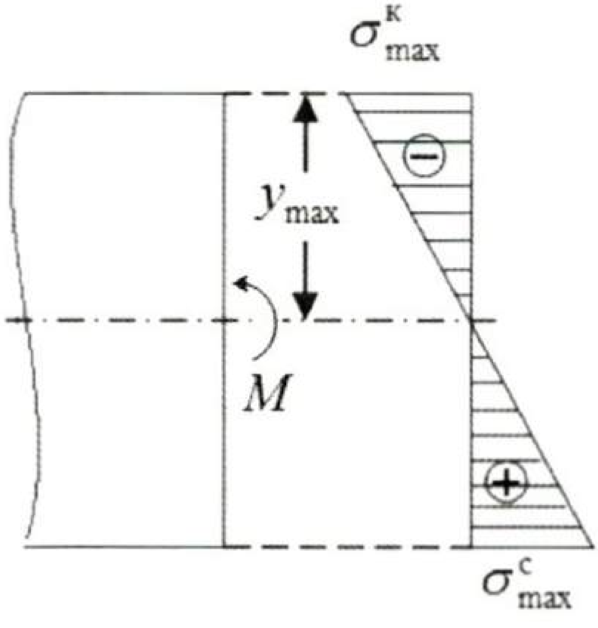
моннан

$$\int_A yzdA=0.$$

Бу зурлык кисемнең үзәктән куучы инерция моментына тигез, димәк, Oz һәм Oy күчәрләре төп күчәрләр була.

Нәтиҗәдә симметрик кисем күчәрләре Oz һәм Oy төп үзәк күчәрләр була. Калган очраклар өчен көчләр яссылыгы үзәк күчәргә параллель булырга тиеш.

11.2. Саф бөгү очрагында ныклыкны исәпләү



Рәс. 35

Нормаль көчәнеш табу формуласыннан көчәнешнең y сызыкча зурлыгына бәйле икәнлеге күренә. 35 нче рәсемдә саф бөгү очрагында нормаль көчәнешнең эпюры күрсәтелгән. Иң зур көчәнеш y иң зур кыйммәт алган ноктада була:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{J_z} y_{max} .$$

Иң ерак нокта һәм нейтраль сызык арасы $y_{\max}$ — бирелгән кисем өчен даими зурлык. Шуңа күрә $J_z / y_{\max}$ чагыштырмасы да даими зурлык була. Аны $W_z = J_z / y_{\max}$ дип билгеләп, экваториаль каршылык моментын башкача — *бөгүгә каршы тору моменты* дип атыйлар. Максималь нормаль көчәнеш формуласы һәм бөгү очрагындагы ныклык шарты кыскача болай языла:

$$\sigma_{x\max} = \frac{|M_z|}{W_z} \le \sigma_{adm}.$$

Бу зурлык кисемнең формасына һәм үлчәмнәренә генә бәйле (материал үзлекләренә бәйле түгел).

Турыпочмаклы кисем өчен:

$$W_z = \frac{J_z}{h/2} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6}.$$

Түгәрәк кисем өчен:

$$J_z = \frac{\pi D^4}{64}, \quad y_{\max} = \frac{D}{2}$$

һәм

$$W = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0{,}1D^3,$$

шуңа күрә $D = \sqrt[3]{10W}$.

Материалны иң аз кулланганда, иң зур каршылык моменты W_z килеп чыкса, ягъни W_z / A чагыштырмасы мөмкин булган зур кыйм-

кыйммәткә ия булса, аркылы кисем формалары экономиялерәк була. Кисем формасы рациональ булсын өчен, кисем мәйданын нейтраль үзәктән мөмкин кадәр ераграк урнаштырырга кирәк *(икетаврлар, швеллерлар)*.

Стандарт профильләр каршылыгы моменты W_z алда исәпләнелгән һәм тиешле ГОСТ таблицаларында бирелгән.

Әгәр балка материалы сузылуга һәм кысылуга төрлечә каршылык күрсәтсә, бер ныклык шарты урынына ике ныклык шартын кулланырга кирәк: берсе иң көчле сузылган җепсел өчен, икенчесе — иң көчле кысылганы өчен:

$$\sigma_x^{\text{с}} = \frac{M}{W_1} \le \sigma_{adm}^{\text{с}} \quad \text{һәм} \quad \left|\sigma_x^{\text{к}}\right| = \frac{|M|}{W_2} \le \sigma_{adm}^{\text{к}},$$

бу формулаларда

$$W_1 = \frac{J_z}{y_{1\max}} \quad \text{һәм} \quad W_2 = \frac{J_z}{y_{2\max}},$$

биредә $y_{1\max}$ — нейтраль сызыкка карата иң ерак урнашкан сузылган җепселләр өчен, $y_{2\max}$ нейтраль күчәргә карата иң ерак урнашкан кысылган җепселләр өчен алына.

12. Тигез каршылыклы балкалар

Кисемнәрне иң зур көчәнешле һәм бөгү моменты максималь зурлыкка ия булган урын буенча сайлап алалар.

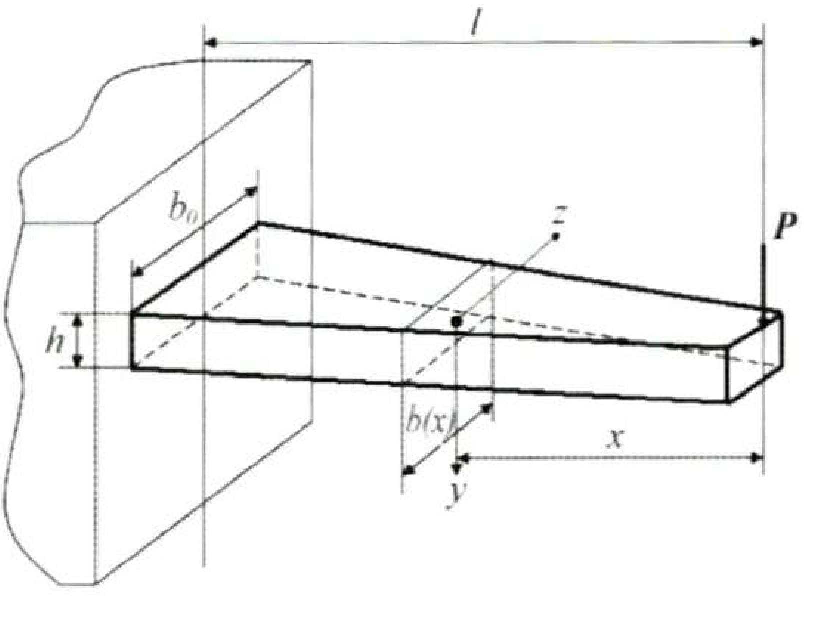
Бөгү моментлары кимрәк булган башка урыннарда аркылы кисем үлчәмнәрен киметергә мөмкин. Бу очракта үзгәрешле кисемле балка алына. Балканың озынлыгына карап, кисем үзгәрешенең рациональ законын сайлауга карата сорау туа. Әгәр барлык аркылы кисемнәрдәге иң зур нормаль көчәнеш мөмкин булган көчәнешкә тигез булса, бөгелүгә карата тигез каршылыклы балка табабыз.

37 нче рәсемдә биеклеге даими булган, иңе сызыкча закон буенча үзгәрүчән турыпочмаклы аркылы кисемле балка күрсәтелгән:

$$h(x) = h = \text{const}\ ,\ b(x) = \frac{b_0}{l}x\,.$$

P көченнән x ераклыгындагы кисемнең каршылык моменты түбәндәгечә табыла:

$$W_z(x) = \frac{b(x)h^2(x)}{6} = \frac{b_0 h^2 \cdot x}{6l} = W_{oz}\frac{x}{l}\,.$$



Рәс. 37

Биредә W_{oz} — терәктәге каршылык моменты.

Балканың алынган кисемендәге бөгү моменты $M_z(x) = Px$ ка тигез.

Бу кисемнең иң еракта урнашкан жепселендәге көчәнеше түбәндәгечә:

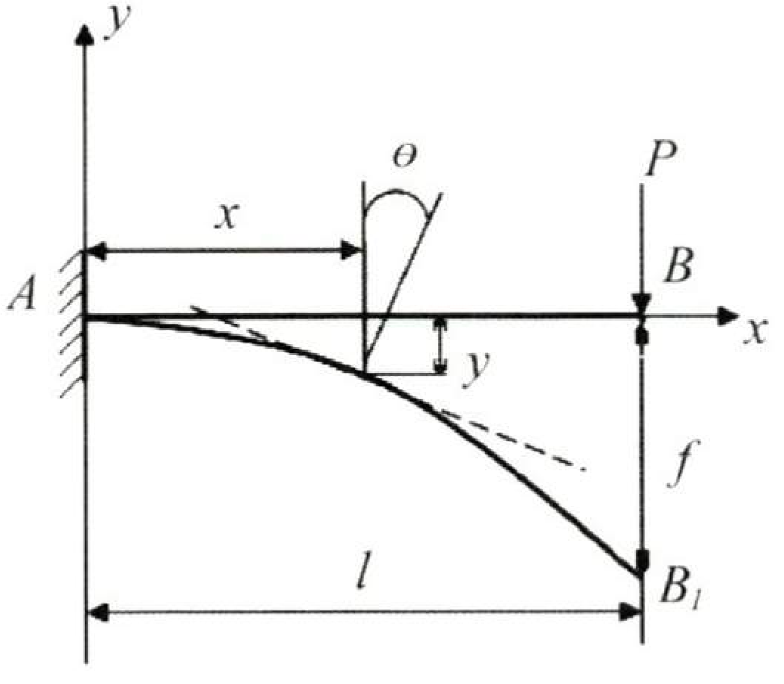
$$\sigma_{\max} = \frac{M_z(x)}{W_z(x)} = \frac{Px}{\left(\frac{b_0 h^2}{6}\right)\frac{x}{l}} = \frac{Pl}{\left(\frac{b_0 h^2}{6}\right)} = \frac{M_{oz}}{W_{oz}} = \sigma_{0\max} = \text{const.}$$

Биредә M_{oz} — терәктәге момент, σ_{0max} — терәк янындагы иң кырый жепсел кисеменең көчәнеше.

Шулай итеп, балканың барлык кисемнәрендәге иң зур нормаль көчәнешләре бертөрле булып чыга, димәк, бу балка бөгүгә тигез каршылыклы була.

13. Бөгелү күчешләре

13.1. Төп аңлатмалар



Рәс. 38

Бер башы каты беркетелгән туры балканы карап үтик (рәс. 38). Аның үзәк сызыгы деформациягә кадәр AB торышын ала, деформациядән соң буй күчәре кәкрәя һәм AB_1 торышын ала, һәм *бөгелгән буй күчәр* дип атала.

Бөгелгәндә балканың аркылы кисемнәре урыннарыннан күчәләр. Ул күчешләр ике төрле була, берсе — *сызыкча күчеш*, икенчесе — *почмакча күчеш*. Сызыкча күчеш балканың элекке буй күчәренә перпендикуляр юнәлгән, ул y зурлыгына ия һәм *бөгелеш* дип атала; өскә таба юнәлгән бөгелеш — уңай, аска юнәлгәне тискәре дип санала (сызыкча күчешнең үлчәү берәмлекләре: *метр, сантиметр, миллиметр*). Почмакча күчеш — аркылы кисемнең элекке торышыннан борылу почмагы ул, без аны θ хәрефе белән тамгалыйбыз һәм *борылыш почмагы* дип йөртәбез, сәгать теле йөрешенә каршы юнәлгән булса — уңай, киресенчә булса, тискәре дип санала (почмакча күчешнең үлчәү берәмлеге — *радиан*).

Балканың бөгелгән күчәренең һәр ноктасының күчешен ноктаның x координатасы белән бәйләүче $y = f(x)$ тигезләмәсе балканың *бөгелгән буй күчәре* яки *эластик сызык тигезләмәсе* дип атала. Шул вакытта $\operatorname{tg}\theta = dy / dx$ була. Деформация аз булу сәбәпле, $\operatorname{tg}\theta = \theta$ дип санарга мөмкин. Шуңа күрә кисемнең борылыш почмагы бөгелешнең беренче чыгарылмасына тигез:

$$\theta = dy / dx = y' .$$

13.2. Балканың бөгелгән буй күчәренең дифференциаль тигезләмәсе. Турыдан-туры интеграллау методы

Балканың бөгелгән буй күчәренең тигезләмәсе $y = f(x)$ ны табарга кирәк. Моның өчен без 11 нче бүлектә карап үткән балканың кәкрелеге формуласын кулланабыз:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EJ_z},$$

биредә ρ — балканың бөгелгән буй күчәренең кәкрелек радиусы, $M_z(x)$ — бөгүче момент, EJ_z — бөгелгәндәге катылык.

Математикадан билгеле булганча, турыпочмаклы координаталар системасында теләсә нинди кәкре сызыкның кәкрелеге

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}$$

тигезлеге белән күрсәтелә.

Соңгы ике формуланың уң якларын тигезләп, балканың бөгелгән буй күчәренең дифференциаль тигезләмәсен табабыз:

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} = \pm\frac{M_z(x)}{EJ_z}.$$

Гадәттә бик кечкенә деформацияләр белән эш итәбез, шуңа күрә $(dy/dx)^2$ зурлыгын берәмлек белән чагыштырганда исәпкә алмаска мөмкин. Ул вакытта балканың бөгелгән күчәренең дифференциаль тигезләмәсе түбәндәге рәвештә була:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{M_z(x)}{EJ_z}.$$

Аны балканың бөгелгән күчәренең *якынча дифференциаль тигезләмәсе* дип атыйлар. Уңай һәм тискәре тамгалар булуы координаталар системасын һәм M_z өчен тамгалар кагыйдәсен сайлауга бәйле.

Балканың бөгелгән үзәк күчәренең тигезләмәсен $y = f(x)$ табу өчен, балканың бөгелгән күчәренең дифференциаль тигезләмәсен интегралларга кирәк. Беренче интеграл түбәндәгечә:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \pm\int\frac{M_z(x)}{EJ_z}dx + C.$$

Икенче тапкыр интеграллагач,

$$y = \pm\int\left(\int\frac{M(x)}{EJ}dx\right)dx + Cx + D$$

килеп чыга, биредә C һәм D — интеграллауның даими зурлыклары. Аларның кыйммәтләрен балканың терәк шартларыннан табарга мөмкин. Андый шартлар ике булырга тиеш һәм аларны һәрвакыт түбәндәге схема буенча төзергә мөмкин:

1) Әгәр l озынлыгындагы балканың ике баш-башында шарнирлы терәкләр булса, ул очракта һәр терәктә бөгелеш нульгә тигез булырга тиеш:

$$y(0) = 0; \; y(l) = 0.$$

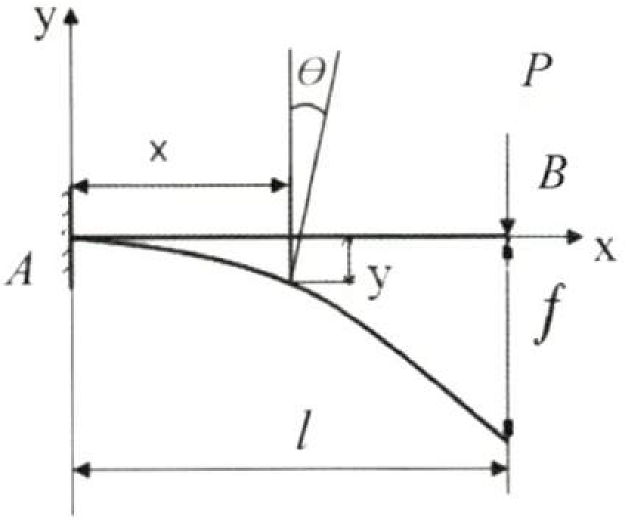
2) Әгәр балканың бер башы каты беркетелгән, икенчесе беркетелмәгән булса, терәктә бөгелү һәм борылыш почмаклары нульгә тигез:

$$\theta(0) = 0 \,; \; y(0) = 0.$$

Балканың бөгелгән үзәк күчәренең дифференциаль тигезләмәсенең турыдан-туры интеграллауга нигезләнгән чишелеше балканың бөгелешен исәпләү методы *аналитик метод* дип атала. Моннан башка тагын *график* һәм *графоаналитик* методлар бар. Ләкин, исәпләү машиналарының киң таралуы сәбәпле, хәзер аналитик метод күбрәк кулланыла.

Балканың бөгелгән күчәренең дифференциаль тигезләмәсен интеграллауга мисаллар карап үтик.

1 н ч е м и с а л. Бер башы каты беркетелгән һәм аркылы киселеме даими булган балканың бөгелгән буй күчәренең дифференциаль тигезләмәсен интеграллауга мисал карыйк (рәс. 39).



Рәс. 39

Балканың A очы каты беркетелгән һәм икенче башына P көче куелган булсын. Балканың озынлыгын — l дип, катылыгын EJ_z дип тамгалыйбыз. Координаталар башын A ноктасында тамгалыйбыз, y күчәрен — өскә, x күчәрен уңга юнәлтәбез. Бөгелгән күчәрнең дифференциаль тигезләмәсен төзибез. Моның өчен координаталар башыннан x ераклыгында урнашкан теләсә нинди кисемне алабыз һәм ул кисемдәге бөгүче моментны табабыз:

$$M_z(x) = - P\,(l - x).$$

Бу очракта балканың бөгелгән күчәренең дифференциаль тигезләмәсе түбәндәгечә языла:

$$EJ_z y'' = -P(l - x)\,.$$

Югарыдагы тигезләмәне ике тапкыр интеграллыйбыз:

$$EJ_z y' = -P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C\,,$$

$$EJ_z y = -P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + Cx + D.$$

Интеграллауның даими C һәм D зурлыкларын табу өчен, бөгелеш һәм борылыш почмагы өчен терәк шартларын кулланабыз:

$$y(0) = 0\,, \quad \theta(0) = y'(0) = 0.$$

Бу кыйммәтләрне тигезләмәләргә куеп, $C=0$, $D=0$ икәнлеген табабыз. Үзгәртүләрдән соң түбәндәге формулалар килеп чыга:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{Plx}{2EJ_z}\left(2 - \frac{x}{l}\right),$$

$$y = -\frac{Plx^2}{6EJ_z}\left(3 - \frac{x}{l}\right).$$

Бу аңлатмаларны кулланып, y һәм θ өчен иң зур кыйммәтләрне табабыз. Бөгелешнең иң зур абсолют кыйммәте B ноктасында була:

$$f_B = -\frac{Pl^3}{3EJ_z},$$

минус тамгасы бөгелешнең аска юнәлгәнлеген күрсәтә.

Иң зур борылыш почмагы шул ук кисемдә,

$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EJ_z},$$

минус тамгасы кисемнең сәгать теле уңаена борылганлыгын күрсәтә.

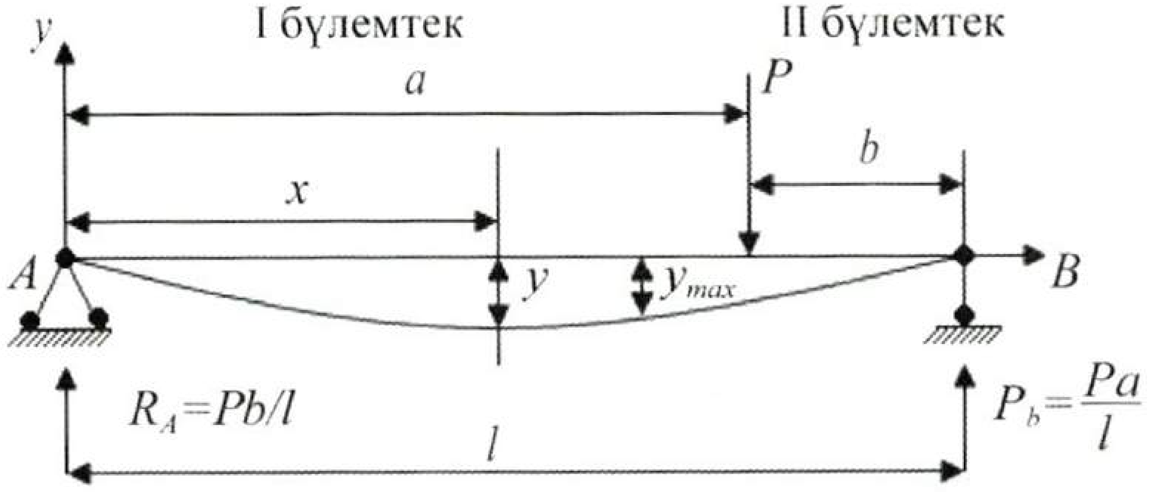
Балка деформациясенең санлы кыйммәтен бәяләү өчен, P = 2т, l = 2м дип алабыз. Мөмкин булган көчәнеш σ_{adm} = 1400 кГ/см^2 һәм сортамент таблицасы буенча ике тамгалы кисемле балканың кисемен сайлап алабыз. Ныклык шартыннан табабыз:

$$W_z \geq \frac{Pl}{\sigma_{adm}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{1400} = 286\text{см}^3.$$

Сортамент таблицасыннан 22 нче а номерлы балканы сайлап алабыз, аның өчен W_z=309 см^3, J_z = 3400 см^4, E=2⊙10^6 кГ/см^2. Бу балка өчен f_B = – 0,78 см һәм θ = –1/170 рад — 1/3^0 килеп чыга.

Дөрестән дә, бу исәпләүләрдән гадәти балкаларның деформацияләре бик кечкенә икәнлеге күренә; иң зур бөгелеш балка

озынлыгының 1/255 өлешен алып тора, иң зур борылыш почмагы зурлыгының квадраты $1/(170)^2 = 1/29000$ гә тигез. Бу зурлыкны, «бер» белән чагыштырганда, исәпкә алмаска да мөмкин.



Рәс. 40

2 нче мисал. Бүлемтекләргә бүленгән ике терәкле балканың бөгелгән күчәренең дифференциаль тигезләмәсен интеграллау мисалын карыйк (рәс. 40).

I бүлемтекнең ирекле кисемендәге бөгүче моменты ($0 \le x \le a$) һәм II бүлемтекнең ирекле кисемендәге ($a \le x \le l$ булганда) бөгүче моменты түбәндәгечә исәпләнә:

$$M_I = R_A x = \frac{Pb}{l} x \quad \text{һәм} \quad M_{II} = R_A x - P\left(x - a\right) = \frac{Pb}{l} x - P(x - a).$$

I һәм II бүлемтекләр өчен бөгүче моментларның аңлатмалары төрлечә, шуңа да I һәм II бүлемтекләрдәге эластик сызыкларның

тигезләмәләре дә төрле. Шуңа күрә һәр бүлемтек өчен тигезләмәләрне аерым интеграллыйбыз:

$$y_I'' = \theta'_I = \frac{M_1}{EJ_z} = \frac{Pb}{ElJ_z}x,$$

$$y_I' = \theta_I = \frac{Pbx^2}{2ElJ_z} + C_1,$$

$$y_I = \frac{Pbx^3}{6ElJ_z} + C_1x + D_1.$$

II бүлемтек өчен дифференциаль тигезләмә түбәндәгечә була:

$$y_{II}'' = \theta'_{II} = \frac{M_{II}}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{Pb}{l}x - P(x-a)\right).$$

Интеграллаганнан соң ул түбәндәгечә була:

$$y_{II}' = \theta_{II} = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{Pbx^2}{2l} - \frac{P(x-a)^2}{2}\right) + C_2,$$

$$y_{II} = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{Pbx^3}{6l} - \frac{P(x-a)^3}{6}\right) + C_2x + D_2.$$

Биредә К л е б ш методын кулландык, ул түбәндәгедән гыйбарәт: $P(x-a)dx$ аңлатмасы, интеграллаганда, $P(x-a)\,d\,(x-a)$ аңлатмасы белән алыштырыла, чөнки $d\,(x-a) = dx$, һәм интеграллау операциясе җәяләрне ачмыйча гына башкарыла. Шулай итеп,

$$\int P(x-a)dx = \int P(x-a)d(x-a) = \frac{P(x-a)^2}{2} + C.$$

Борылыш почмагын һәм балканың бөгелешен табу тигезләмәләренә дүрт даими кыйммәт кирә. Аларны табу өчен, балка очларындагы шартларны I һәм II бүлемтекләре чигендәге кисем шартларына кулланабыз:

$x = 0$ һәм $x = l$ булганда, $y_I(0) = 0;\ y_{II}(l) = 0.$

Бүлемтекләр чигендә $x=a$ булганда, бөгелешләр һәм борылыш почмаклары (бүлемтекләр өчен) үзара тигез була,

$$y_I(a) = y_{II}(a), \qquad \theta_I(a) = \theta_{II}(a).$$

Бөгелеш һәм борылыш почмаклары тигезләмәләрен кулланып, бу шартларны язабыз:

$$y_I(0) = D_1 = 0,\ y_{II}(l) = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{Pbl^3}{6l} - \frac{P(l-a)^3}{6l}\right) + C_2 l + D_2 = 0,$$

$$y_I(a) = \frac{Pba^3}{6EJ_z l} + C_1 a + D_1 = y_{II}(a) = \frac{Pba^3}{6EJ_z l} + C_2 a + D_2,$$

$$\theta_I(a) = \frac{Pba^2}{2EJ_z l} + C_1,\ \ \theta_{II}(a) = \frac{Pba^2}{2EJ_z l} + C_2.$$

Соңгы ике аңлатмадан $C_1 = C_2$, $D_1 = D_2$ килеп чыга. Бу — эластик сызыкның дифференциаль тигезләмәсен интегралларганда кулланылган К л е б ш методы нәтиҗәсе.

$D_1 = 0$, $D_2 = 0$ булганын исәпкә алып ($b = l - a$), табабыз:

$$C_1 = C_2 = -\frac{Pb}{6EJ_z l}\left(l^2 - b^2\right).$$

Шуңа күрә:

$$\theta_1 = \frac{Pbx^2}{2EJ_z l} - \frac{Pb}{6EJ_z l}\left(l^2 - b^2\right) = \frac{Pb}{6EJ_z l}\left(3x^2 + b^2 - l^2\right);$$

$$y_1 = \frac{Pbx^3}{6EJ_z l} - \frac{Pb}{6EJ_z l}\left(l^2 - b^2\right)x = \frac{Pbx}{6EJ_z l}\left(3x^2 + b^2 - l^2\right);$$

$$\theta_{II} = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{Pbx^2}{2l} - \frac{P\left(x-a\right)^2}{2}\right) - \frac{Pb}{6EJ_z l}\left(l^2 - b^2\right) = \frac{Pb}{6EJ_z l}\left(x^2 + b^2 - l^2\right) - \frac{P\left(x-a\right)^2}{2EJ_z};$$

$$y_{II} = \frac{1}{EJ_z}\left(\frac{Pbx^3}{6l} - \frac{P\left(x-a\right)^3}{6}\right) - \frac{Pb}{6EJ_z l}\left(l^2 - b^2\right)x = \frac{Pbx}{6EJ_z l}\left(x^2 + b^2 - l^2\right) - \frac{P\left(x-a\right)^3}{6EJ_z}.$$

P көче аралыкның уртасына куелган очракта

$$\theta_1 = \frac{Pb}{4EJ_z}\left(x^2 - \frac{l^2}{4}\right), \qquad y_1 = \frac{Px}{12EJ_z}\left(x^2 - \frac{3l^2}{4}\right).$$

Аралык уртасында иң зур бөгелү була:

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Pl^3}{48EJ_z}.$$

Сул терәктә борылыш почмагы ($x = 0$ булганда) түбәндәгечә:

$$\theta_0 = \frac{-Pbl}{16EJ_z} = \frac{-Pl^2}{32EJ_z}.$$

Эшләнгән мисаллар буенча, эластик сызыкның дифференциаль тигезләмәсен турыдан-туры интеграллау методы белән балкалар бөгелгәндәге күчешләрне табуның мондый тәртибен билгеләргә була:

1. Балканың һәр бүлемтеге өчен бөгүче моментның аңлатмасын төзибез.
2. Бөгүче моментның аңлатмасын балканың бөгелгән буй күчәренең төп дифференциаль тигезләмәсенә куябыз.
3. Төп дифференциаль тигезләмәне ике тапкыр интеграллау нәтиҗәсендә балканың һәр бүлемтеге өчен борылыш почмагы һәм кисем күчешенең гомуми аңлатмалары килеп чыга.
4. Балканың терәгендәге һәм аның бүлемтеге чикләрендәге шартлардан чыгып, интеграллауның даими кыйммәтләре билгеләнә.
5. Табылган даими кыйммәтләр борылыш почмагының һәм балка бөгелешенең гомуми аңлатмаларына куела.
6. Мәсьәләнең шартына карап, балканың теге яки бу кисемендәге борылыш почмагының һәм бөгелешенең кыйммәтләре исәпләнә.

14. Катлаулы каршылык

Моңа кадәр әле без конструкция стерженьнары иң гади деформацияләнгәндәге (үзәк сузылу-кысылу, бөтерү, яссы бөгү булгандагы) мәсьәләләрне карадык. Әмма практикада конструкция һәм машиналарның күпчелек элементлары күрсәтелгән деформацияләрнең берсен генә түгел, ә берничә деформация китереп чыгара торган көчләр карала. Мәсәлән, машина валлары бөтерү һәм бөгү деформацияләренә дучар булалар. Иң гади деформацияләр комбинациясе белән эш иткәндә, стерженьнар каршылыкларының шундый очраклары *катлаулы каршылык* дип атала.

14.1. Кыек бөгү

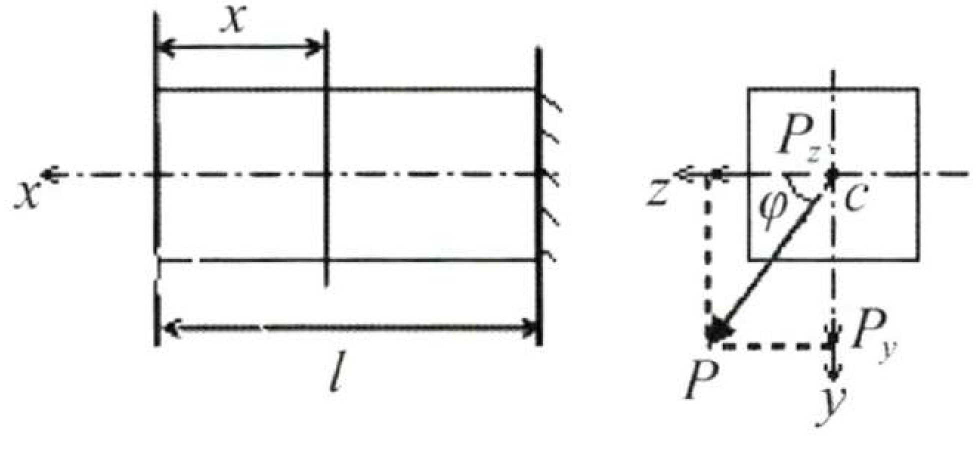
Стерженьның бирелгән аркылы кисемендә бөгүче моментның тәэсир итү яссылыгы бу кисемнең төп үзәк күчәрләренең берсе аша да үтми торган бөгү *кыек бөгү* дип атала, димәк, кыек бөгү вакытында, бөгүче моментның тәэсир итү яссылыгы төп инерция яссылыкларының берсе белән дә туры килми.

Стерженьның аркылы кисемендә бөгүче момент кына барлыкка килсә, бөгүнең бу очрагы *чиста кыек бөгү* дип атала. Әгәр кисемдә аннан башка аркылы көч тә тәэсир итсә, ул *аркылы кыек бөгү* була.

Чиста кыек бөгүнең көчәнешләрен исәплик.

Моңа кадәр чиста бөгү деформациясенең нормаль көчәнешен табу өчен, без $\sigma = \dfrac{M_z y}{J_z}$ $(-h/2 \le y \le h/2)$ формуласын куллана идек. Ләкин балканың кайсы да булса кисемендәге көчәнешләр бу формула ярдәмендә яссы бөгү очрагында гына табыла.

Кыек бөгү вакытындагы ныклыкны тикшерү методын һәм балканың деформациясен исәпләүне мисалда күрсәтәбез (рәс. 41).



Рәс. 41

Стерженьга тәэсир итүче, аның буй күчәренә перпендикуляр булган P көче төп үзәк яссылыкларының берсендә дә ятмый. P көчен y һәм z төп үзәк күчәрләренә таркатабыз.

Көчнең һәр төзүчесе бөгүче моментны бирә:

$$M_z = P_y \cdot x = Px\sin\varphi = M\sin\varphi;$$

$$M_y = P_z \cdot x = Pxcxc\varphi = M\cos\varphi.$$

Биредә $M = P\cdot x$ — көчнең моменты

$$M(P) = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

M_y һәм M_z кисемнең $C(y,z)$ ноктасында

$$\sigma(M_y) = \pm\frac{M_y z}{J_y} = \pm\frac{Mz}{J_y}\cos\varphi,$$

$$\sigma(M_z) = \pm\frac{M_z y}{J_z} = \pm\frac{My}{J_z}\sin\varphi$$

көчәнешләрен бирә.

C ноктасында көчәнешләр суммасы түбәндәгечә:

$$\sigma = \sigma(M_y) + \sigma(M_z) = \pm\left(\frac{M_y z}{J_y} \pm \frac{M_z y}{J_z}\right)$$

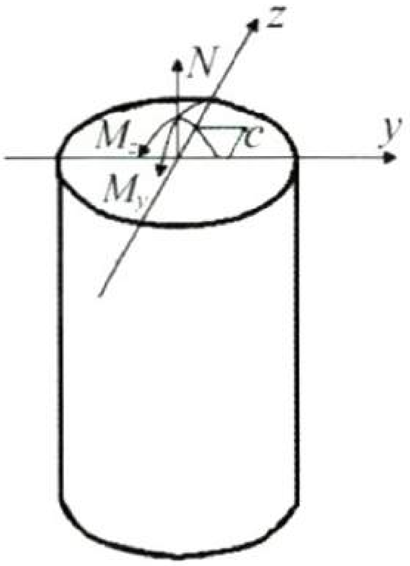
яки

$$\sigma = \pm M\left(\frac{z}{J_y}\cos\varphi \pm \frac{y}{J_z}\sin\varphi\right),$$

биредә y һәм z үзләренең тамгалары белән алыналар. Бу формуладагы тамгалар моментлар өчен тамгалар кагыйдәсен сайлауга бәйле.

14.2. Бер үк вакытта тәэсир итүче бөгүче һәм буй көчләр

Корылма һәм машиналарның күп кенә стерженьнары бер үк вакытта бөгү, сузылу яки кысылуга дучар булалар. 42 нче рәсемдә шундый очрак күрсәтелгән.



Рәс. 42

Тышкы йөкләнеш ике төп инерция күчәрләренә карата M_z һәм M_y моментларын һәм N буй көчен барлыкка китерә.

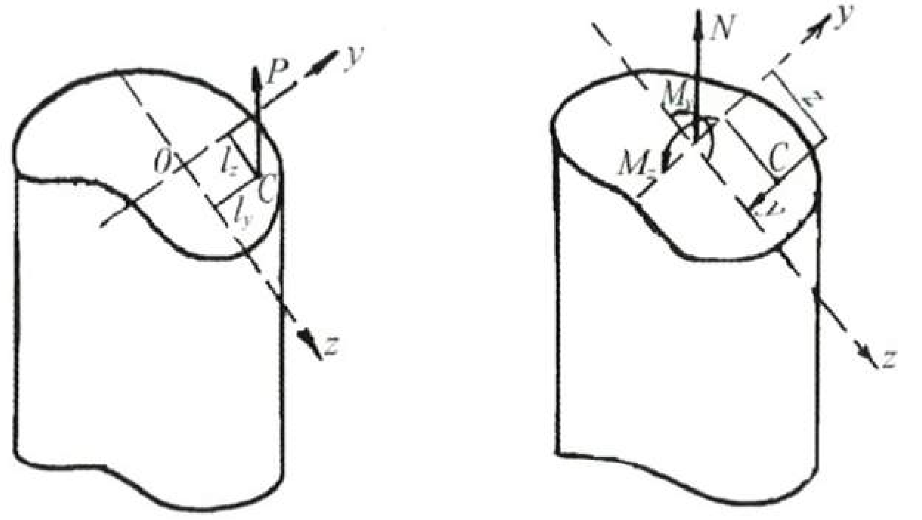
Бу очракта көчләр тәэсиренең бәйсезлек принцибын кулланырга һәм $C(y,z)$ ноктасындагы көчәнешне сузу һәм бөгүче моментлар тәэсирләре суммасы буларак табарга мөмкин:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_Z}{J_Z} y + \frac{M_Y}{J_Y} z \, .$$

Иң зур көчәнешне табу өчен, нейтраль сызыкның торышын һәм бу сызыктан кисемнең иң ерактагы ноктасын табарга кирәк, иң зур көчәнеш тә шунда булачак.

Нуль сызыгын табу өчен, югарыдагы формулада σ көчәнешен нульгә тигезлибез ($\sigma = 0$).

14.3. Үзәк аша узмый торган сузу һәм кысу



Рәс. 43

Үзәк аша узмый торган сузу һәм *кысу* дип, буйга сузучы яки кысучы көч борысның буй күчәре белән тәңгәл килмәгәндәге деформация төре атала.Түбәндә авыр колонналарның шундый сузу очрагын карыйбыз (рәс. 43).

Мондый мәсьәлә күпер төзелешендә анның терәген, төзелеш биналарының колонналарын (баганаларын) исәпләгәндә бик еш очрый.

$$M_z = l_y P; \quad M_y = l_z P.$$

Шулай итеп, үзәк аша узмый торган сузу (кысу) кыек бөгүгә охшаш була. Соңгысыннан аермалы буларак, борысның аркылы кисемендә бөгүче момент кына түгел, $N = P$ нормаль көче дә барлыкка килә.

P көче куела торган A ноктасын *басым үзәге* дип атыйлар.

Кисемнең координаталары y һәм z булган теләсә нинди C ноктасындагы нормаль көчәнеш суперпозиция принцибын кулланып табыла: $\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \pm\left(\frac{P}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z\right)$.

Төп көчәргә карата моментлар $M_z = l_y P$, $M_y = l_z P$ булганга күрә, бу формула болай языла: $\sigma = \pm\left(\frac{P}{A} + \frac{Pl_y}{J_z} y + \frac{Pl_z}{J_y} z\right)$.

Шушы формуланы башка рәвештә дә күрсәтергә мөмкин:

$$\sigma = \pm\frac{P}{A}\left(1 + \frac{l_y}{i_z^2} y + \frac{l_z}{i_y^2} z\right),$$

биредә $i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$, $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$ — борысның аркылы кисемнәренең инерция радиуслары.

14.4. Аркылы кисеме түгәрәк булган борысларны бөтерү һәм бөгү

Аркылы кисеме түгәрәк булган борысларның бөгү һәм бөтерү очраклары ешрак валларны исәпләгәндә тикшерелә.

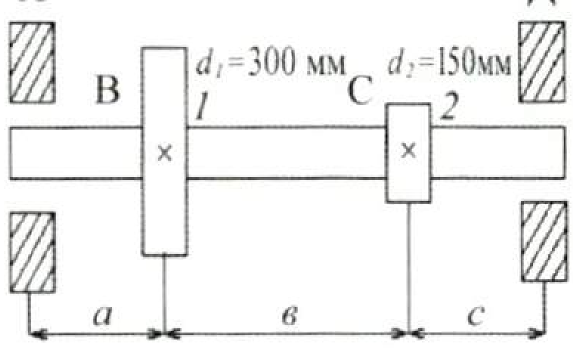
Гомуми очракта түгәрәк кисемле борыслар тышкы көчләр тәэсирендә түбәндәге деформация төрләрен кичерәләр: *туры аркылы бөгү, бөтерү* һәм *үзәктән сузу (кысу).*

Түгәрәк кисемнең төп үзәк күчәрләренә карата инерция моментлары үзара тигез булганлыктан, бу очракта кыек бөгү булуы мөмкин түгел.

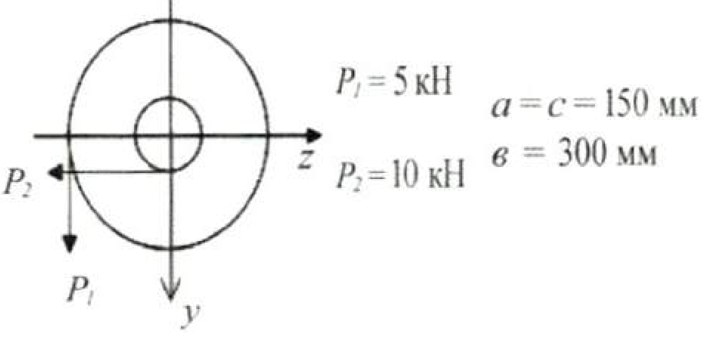
Аркылы кисемдәге буй көч нульгә тигез булган түгәрәк кисемле борысны исәпләү очрагын карыйбыз. Бу очракта борыс бөгү һәм бөтерүнең бердәм тәэсирендә була.

Борысның куркыныч кисемен табу өчен, борысның озынлыгы буенча бөгүче һәм бөтерүче моментларның зурлыкларының ничек үзгәргәнен белергә кирәк, яки бөгүче момент M һәм бөтерүче момент $M_б$ ның эпюраларын төзергә кирәк.

Бу эпюраларны төзүне 44 нче һәм 45 нче рәсемнәрдә күрсәтелгән вал мисалында карыйбыз. Вал А һәм Д подшипникларында тупса белән беркетеп куелган, анда В һәм С тешле тәгәрмәчләр утыртылган, аларга P_1 һәм P_2 тангенциаль көчләре тәэсир итә.



Рәс. 44



Рәс. 45

Валны подшипникларда ышкылусыз әйләнә дип уйлыйк. Валның үз авырлыгын игътибарга алмыйбыз, P_1=5кН, P_2=10кН, d_1=300мм, d_2=150мм. Валның аркылы кисемендә y күчәрен — вертикаль итеп, ә z күчәрен горизонталь итеп юнәлтәбез. P_1 һәм P_2 көчләрен, һәрберсен B һәм C нокталарына куелган көчләр белән һәм $m_B = P_1 \frac{d_1}{2}$ һәм $m_C = P_2 \frac{d_2}{2}$ моментлары белән алыштырып, вал үзәгенә күчерәбез. Көчләрнең ике пары үзара тигезләшәләр яки $m_B = m_C$ була.

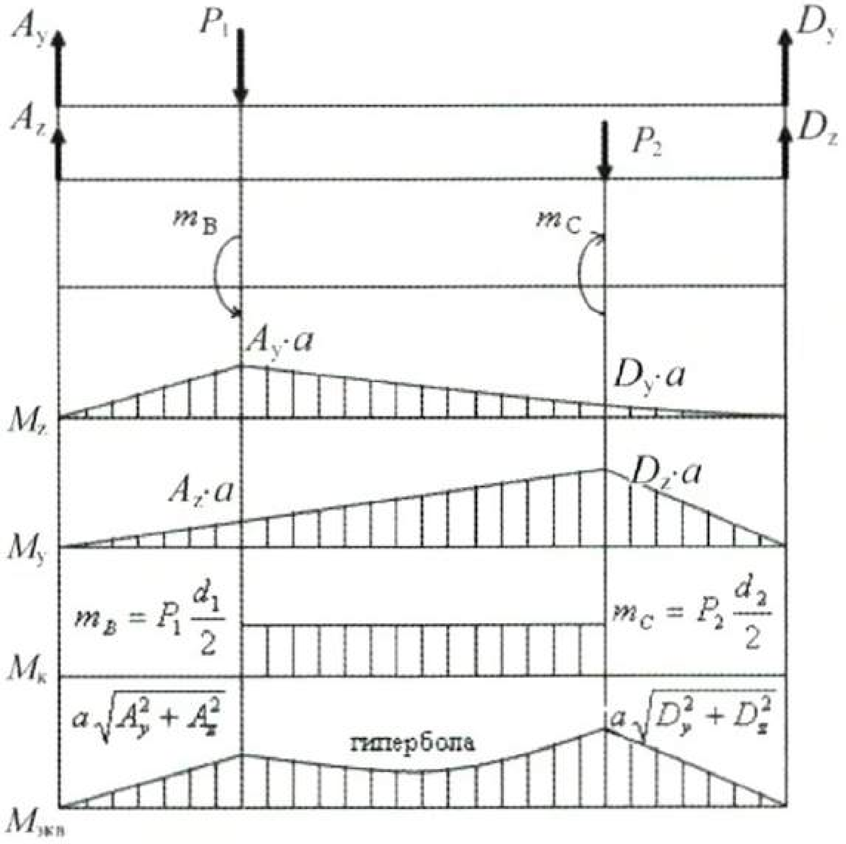
P_1 вертикаль көче подшипникларда A_y һәм D_y вертикаль реакцияләре, ә P_2 горизонталь көче A_z һәм D_z горизонталь реакцияләр китереп чыгара. Бу реакцияләрнең зурлыклары ике терәктә ятучы балканыкы кебек билгеләнә. Вертикаль яссылыкта тәэсир итүче M_z моментының эпюрасы A_y, D_y һәм P_1 вертикаль көчләреннән төзелә. A_z, D_z һәм P_2 горизонталь көчләреннән дә эпюра шуңа охшаш рәвештә төзелә. M_y һәм M_z эпюралары буенча тулы бөгү моментын табарга мөмкин:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}\ .$$

M_y һәм M_z эпюралары белән чикләнгән турылар эпюралар нуль сызыгын бер вертикальдә урнашкан нокталарда кисеп үткән валның бүлемтекләрендә M эпюрасы туры сызыклары белән чикләнгән, ә калган бүлемтекләрдә ул икенче дәрәҗәдәге кәкре сызык белән чикләнгән.

Тулы бөгүче моментларның эпюрасы валның һәр кисемендәге моментларның зурлыгын характерлый. Бу моментларның тәэсир итү яссылыгы валның төрле кисемнәрендә төрлечә, ләкин эпюраның ординаталары шартлы рәвештә барлык кисемнәр өчен дә сызым яссылыгы белән туры китерелгән.

Бөтерүче моментларның эпюрасы чиста бөтерүдәге кебек үк төзелә (рәс. 46).



Рәс. 46

14.5. Бөгү һәм бөтерү очрагында көчәнешне билгеләү һәм ныклыкны тикшерү

Валның куркыныч кисеме тулы бөгүче момент M һәм бөтерүче момент $M_б$ эпюралары ярдәмендә билгеләнә.

Әгәр даими диаметрлы, иң зур бөгүче моменты M булган борысның кисемендә иң зур бөтерүче момент $M_б$ да тәэсир итсә, бу кисем *куркыныч кисем* була.

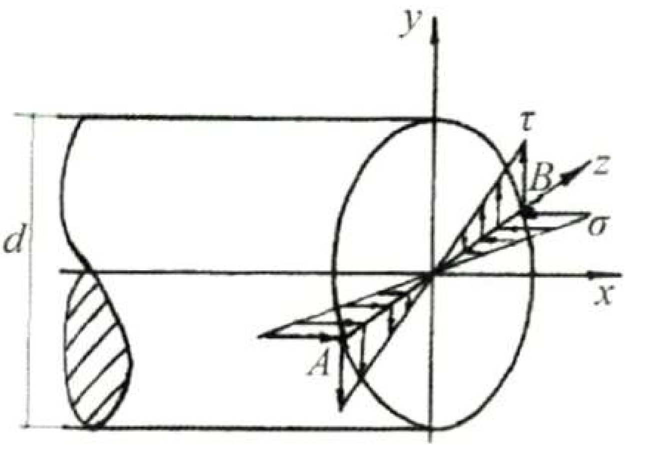
Әгәр дә иң зур бөгүче момент M һәм иң зур бөтерүче момент $M_б$ төрле аркылы кисемнәрдә тәэсир итсәләр, M һәм $M_б$ зурлыклары иң зур булмаган очракта да, кисем куркыныч булырга мөмкин.

Үзгәрүчән диаметрлы борысларда башка кисемнәргә караганда бөгүче һәм бөтерүче моментлар күпкә кимрәк тәэсир иткән кисем дә куркынычлы булырга мөмкин.

Куркыныч кисемнәрне турыдын-туры M һәм $M_б$ эпюраларыннан билгеләп булмаган очракларда, борысның ныклыгын аның берничә кисемендә тикшерергә һәм, шулай итеп куркыныч көчәнешне билгеләргә туры килә. Безнең мисалда C кисеме куркыныч кисем була.

Борысның куркыныч кисемен билгеләгәннән соң (яки шикле булган берничә кисем билгеләнсә), анда куркыныч нокталарны табарга кирәк.

Моның өчен бер үк вакытта тәэсир итүче бөгүче момент M һәм бөтерүче момент $M_б$ булган очракта борысның аркылы кисемендә барлыкка килгән көчәнешләрне тикшерәбез.



Рәс. 47

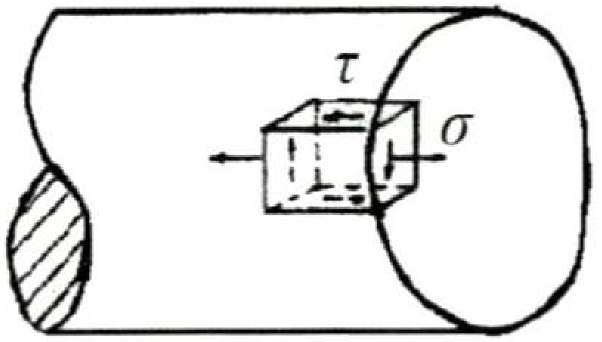
47 нче рәсемдә түгәрәк борысның аркылы кисеме күрсәтелгән. Бу кисемдә бөгүче момент M һәм бөтерүче момент $M_б$ тәэсир итә. Ординаталар күчәре y бөгүче момент M тәэсир итү яссылыгына перпендикуляр итеп алынган, һәм ул кисемнең нейтраль күчәре булып тора. Борысның аркылы кисемендә бөгүнең нормаль көчәнешләре һәм бөтерүнең орынма көчәнешләре барлыкка килә.

Нормаль көчәнеш $\sigma = \frac{M}{J_y} z$ формуласы буенча табыла. Бу көчәнешләрнең эпюрасы 47 нче рәсемдә күрсәтелгән. Абсолют зурлыгы иң зур булган нормаль көчәнеш A һәм B нокталарында барлыкка килә. Бу көчәнешләр: $\sigma_A = -\sigma_B = \frac{M}{W}$, биредә W — борысның аркылы кисеменең бөгүгә каршылык моменты. Орынма көчәнеш τ шушы формула буенча табыла: $\tau = \frac{M_б}{J_\rho} \rho$.

Бу көчәнешнең эпюрасы 47 нче рәсемдә күрсәтелгән. Ул аркылы кисемнең һәр ноктасында σ көчәнешенә карата перпендикуляр юнәлгән. Иң зур орынма көчәнешләр кисем периметры буенча урнашкан нокталарда барлыкка килә.

Пластик материаллар өчен аркылы кисемдә бер үк вакытта нормаль һәм орынма көчәнешләр иң зур кыйммәт ала торган A һәм B нокталары куркыныч нокталар була.

Уалучан материаллар өчен бөгүче M моментыннан сузу көчәнешләре барлыкка килә торган нокталар куркыныч нокталар булып торалар.



Рәс. 48

A ноктасы тирәсендә элементар куб аерып алыйк. Бу кубның дүрт ягы буенча орынма көчәнешләр τ тәэсир итә, икесенә нормаль көчәнеш σ куелган, ике ягы көчәнештән азат. Шулай итеп, материалның аерып алынган элементы яссы көчәнешле халәт кичерә (рәс. 48).

Материалның ныклыгын тикшерү өчен, төп көчәнешләрне (σ_1 һәм σ_3 не) табарга һәм аларны теге яки бу ныклык теориясе нигезендә төзелгән ныклык шартына куярга кирәк. Моңа охшаш яссы көчәнешле халәтне аркылы бөгелгән балканың нейтраль күчәрдән z ераклыгында кисеп алынган элементы буенча сыныйлар.

Аерма шунда: балкада нормаль көчәнешләр σ да, орынма көчәнешләр τ да бөгелү аркасында гына барлыкка киләләр. Төп көчәнешләрне σ_{max} һәм σ_{min} мондый формула буенча табалар:

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xó}^2}.$$

Безнең очракта

$$\sigma_x = \sigma,\ \sigma_y = 0,\ \tau_{xy} = \tau,$$

димәк,
$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_{min} = \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Борысларны бөтерү һәм бөгелү вакытында ныклыкка тикшерү шулай ук ныклык теориясен кулланып башкарыла. Мәсәлән, ныклыкның 3нче теориясе буенча:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_{adm},\ \text{яки}\ \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le \sigma_{adm}.$$

Ягъни кисемнең куркыныч ноктасы өчен ныклык шарты түбәндәгечә языла:

$$\sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_б}{2W}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + M_б^2}}{W} \le \sigma_{adm},\ \text{яки}\ \frac{M_{III}}{W} \le \sigma_{adm},$$

биредә $M_{III} = \sqrt{M^2 + M_б^2}$ зурлыгын ныклыкның 3 нче теориясе буенча *эквивалент моменты* дип атыйлар.

Ә 4 нче теория буенча ныклыкны исәпләү формуласы түбәндәгечә була:

$$\frac{M_{IV}}{W} \le \sigma_{adm},$$

биредә

$$M_{IV} = \sqrt{M^2 + 0{,}75 M_б^2}\,.$$

Ныклыкның башка теорияләре буенча исәпләү формулалары шул ук рәвештә кулланылалар.

Югарыда бирелгән теорияләргә кагылышлы мисалларны карап китик.

1 нче мисал. Валга, 42 нче 43 нче рәсемнәрдә сурәтләнгәнчә, тешле ике тәгәрмәч урнаштырылган. Аларга P_1 = 5кН һәм P_2 = 10кН булган тангенциаль көчләр тәэсир итә. Рөхсәт ителгән көчәнеш σ_{adm} = 100Н/мм^2 булганда, валның диаметрын табарга (валның A һәм D нокталарында терәкләре булып подшипниклар тора).

Чишү. Көчләрне параллель күчерү теоремасын кулланып, P_1 һәм P_2 көчләрен валның кисем үзәгенә күчерәбез. Бу вакытта аларның һәрберсен B һәм C нокталарына куелган көчләр һәм моментлар белән алыштырабыз:

$$m_B = P_1\frac{d_1}{2} \text{ һәм } m_C = P_2\frac{d_2}{2}.$$

Эпюрадан күренгәнчә (рәс. 46), C куркыныч кисем була. Валның диаметрын, 4 нче теория буенча, түбәндәгечә табабыз:

$$M_{IV} = \sqrt{M^2 + 0{,}75 M_б^2} = 13{,}12 \text{кН} \cdot \text{мм}.$$

Ныклыкны исәпләү формуласыннан табабыз:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{IV}}{\pi \cdot \sigma_{adm}}} = 51\text{мм}.$$

2 н ч е м и с а л. Бөтерелә һәм сузыла торган түгәрәк кисемле борысның ныклыгын (ныклыкның 3 нче һәм 4 нче теорияләре буенча) тикшерергә. Бирелә: σ_{adm} = 12Н/мм², $M_б$ = 9кНм, P = 50кН, d = 200мм.

Ч и ш ү. Борысның барлык аркылы кисемнәрендә бер үк төрле эчке көчләр барлыкка килә: $N = P$ = 50кН һәм $M_б$ = 9кНм.

Борысның куркыныч нокталарында нормаль һәм орынма көчәнешләрне табабыз (тикшерелә торган борысның аркылы кисем контурында ята торган барлык нокталары куркыныч нокталар була):

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 200^2} = 1{,}59\text{Н}/\text{мм}^2,$$

$$\tau = \frac{M_б}{W_\rho} = \frac{9 \cdot 10^6 \cdot 16}{3{,}14 \cdot 200^3} = 5{,}73\text{Н}/\text{мм}^2.$$

Ныклыкның 3нче теориясе буенча:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{1{,}59^2 + 4 \cdot 5{,}73^2} = 11{,}56 < 12\text{Н}/\text{мм}^2.$$

Ныклыкның 4 нче теориясе буенча табабыз:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{1{,}59^2 + 3 \cdot 5{,}73^2} = 10{,}05 < 12\text{Н}/\text{мм}^2.$$

Шулай итеп, 3нче теория буенча борыс 4 % ка, 4 нче теория буенча 16 % ка оптималь йөкләнмәгән.

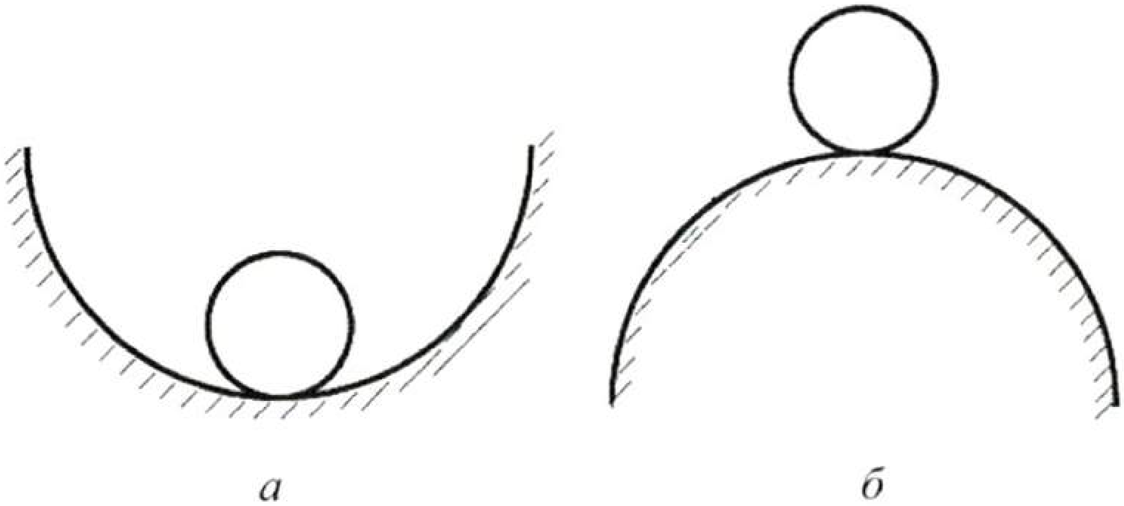
15. Буйга кысылган стерженьның тотрыклылыгы

15.1.Тигезләнешнең тотрыклы һәм тотрыксыз формалары турында төшенчә

Моңа кадәр без төп деформация (сузу-кысу, кисү, бөтерү һәм бөгү) төрләре өчен көчәнешләрне һәм деформацияләрне ачыклау методларын карадык. Шулай ук катлаулы каршылык очракларында материалның ныклыгы критерийлары ачыкланды.

Ныклык проблемасы белән беррәттән корылмаларның һәм аларның элементларының тотрыклылыгы проблемасы да бар.

Әгәр кечкенә генә үзгәрешләр системаны тигезләнеш торышыннан тайпылдырмаса, бу торыш тотрыклы була. Киресенчә, әгәр кечкенә



а *б*

Рәс. 49

генә үзгәреш зур тайпылышлар китереп чыгарса, соңгы торыш тотрыксыз була.

Тотрыклы яки тотрыксыз тигезләнешкә мисал булып батынкы һәм кабарынкы сферада ятучы авыр шарчыкның тигезләнеше тора.

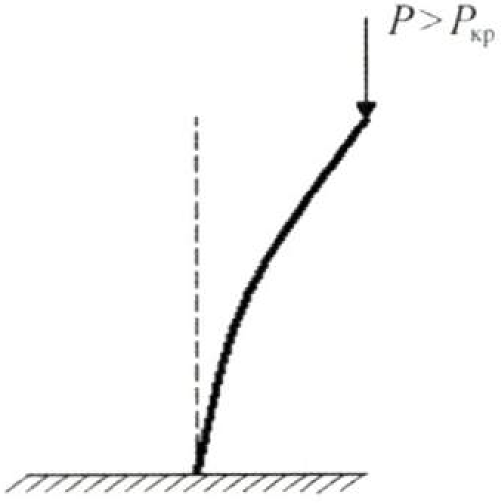
Беренче очракта (рәс. 49, *а*) кечкенә генә тайпылыш булганда шарчык башлангыч торышка кайтырга омтыла. Икенче очракта (рәс. 49, *б*) кечкенә генә тайпылыштан да шарчык аска таба тәгәри. Батынкы сфераның төбендә ятучы шарчык тотрыклы тигезләнештә тора, ә кабарынкы сфера түбәсендәге шарчыкның тигезләнеше тотрыксыз тигезләнеш була.

Шундый ук күренешләрне кысылган стерженьны өйрәнгәндә дә күзәтергә мөмкин. Билгеле бер критик кыйммәттән кимрәк булган $(P<P_{кр})$ кысучы көч тәэсир иткәндә, кысылган стержень кечкенә үзгәрешләрне сизми (бик кечкенә аркылы көчләр стерженьны турысызыклы торышыннан бик аз тайпылдыра).

Критик кыйммәттән зуррак булган кысучы көч тәэсир иткәндә $(P>P_{кр})$, кысылган стерженьның турысызыклы формасы тотрыксыз була (бик кечкенә генә тәэсирләр дә зур тайпылыш китереп чыгаралар). Ул вакытта стержень кысучы буй көче тәэсирендә бөгелгән торышта кала (рәс. 50).

Буй бөгелеш шуның белән куркыныч: кысу көче бик аз артканда да, бөгелешләр бик көчле үсәргә мөмкин. Бөгелешләрнең (сыгылуларның) тиз үсүе бөгү деформациясе нәтиҗәсендә аркылы кисемнәрдә көчәнешләрнең тиз артуын китереп чыгара, ә анысы, үз

чиратында, деформациянең зураюына һәм стерженьның җимерелүенә китерә.



Рәс. 50

Озын һәм нәзек стерженьнар өчен тотрыклылыкның югалуы чагыштырмача зур булмаган кысучы көчәнешләр (материалның ныклыгы ягыннан куркыныч булмаган көчәнешләр) нәтиҗәсендә барлыкка килә.

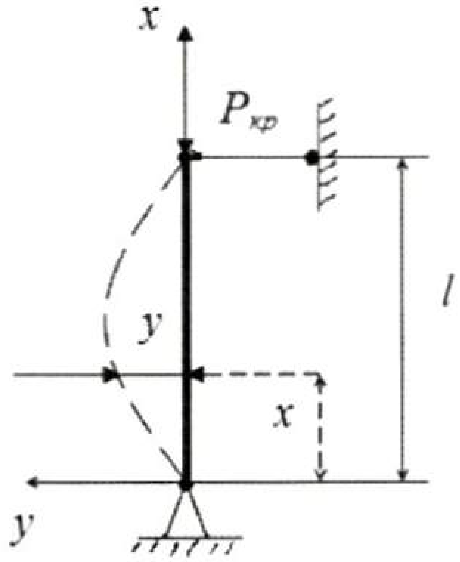
Шулай итеп, буй бөгелеш куркыныч, аны булдырырга ярамый. Моның өчен кысылган стерженьнарның аркылы кисемнәре нормаль көчәнешләрнең критик көчәнешләрдән кимрәк булу шартыннан чыгып билгеләнергә тиеш:

$$\sigma < \sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{A}.$$

Критик көчләрне ачыклау, тотрыклылыкны югалту формаларын өйрәнү, аркылы кисемнәрнең зурлыгын исәпләү корылмаларның тотрыклылыгы турындагы фәннең төп мәсьәләсе булып тора.

15.2. Буй бөгелеш. Эйлер формуласын чыгару

Үзәк буй көчәр буенча кысылган стерженьның турысызыклы торышын югалтуы *буй бөгелеш* дип атала. Бу тотрыклылык проблемасы белән бәйле инженер мәсьәләләренең иң гадие һәм шул ук вакытта иң әһәмиятлесе.



Рәс. 51

Аркылы кисемнәре даими, очлары шарнирлы беркетелгән туры стерженьны карыйк (рәс. 51). Югары очына стерженьның буй көчәре буйлап кысучы $P_{кр}$ йөге куелган булсын (бу вакытта стержень тигезләнешенең турысызыклы формасы тотрыксыз була). Бу көч *критик көч* дип атала. Тотрыклылыгын югалткан стерженьның буй күчәре рәсемдә штрих сызык белән күрсәтелгән, бу кәкре сызык стерженьның *эластик сызыгы* дип атала. Эластик сызыкның якынча дифференциаль тигезләмәсе түбәндәге рәвештә языла:

$$y'' = \frac{M_z}{EJ_z}.$$

Биредә

$J_z = J_{\min}$ — аркылы кисемнең минималь төп үзәк инерция моменты.

Координаталар башлангычын стерженьның аскы очында урнаштырыйк, ә x күчәрен өскә таба юнәлтик. Абсциссасы x булган кисемдә бөгү моменты түбәндәгечә:

$$M_z = -P_{\text{кр}} y .$$

Моңа нигезләнеп, алдагы дифференциаль тигезләмәгә үзгәреш керткәч, ул түбәндәге рәвештә була:

$$y'' + \kappa^2 y = 0 ,$$

биредә

$$\kappa^2 = \frac{P_{\text{кр}}}{EJ_z} .$$

Дифференциаль тигезләмәнең гомуми чишелеше түбәндәге рәвештә языла:

$$y = A\cos kx + B\sin kx.$$

A һәм B даими зурлыклары терәк шартларыннан табыла:

а) $x = 0$ булганда, $y = 0$;

гомуми чишелешкә нигезләнеп табабыз:

$0 = A\cos 0 + B\sin 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A$ ягъни $A = 0$ һәм $y = B \sin kx$

б) $x = l$, $y = 0$ һәм гомуми чишелешкә нигезләнеп табабыз:

$B \sin kl = 0,$

бу шарт $B = 0$ яки $\sin kl = 0$ булганда үтәлә.

Даими зурлык *B* нульгә тигез була алмый, чөнки бу очракта стержень деформацияләнмәгән була, димәк,

$$\sin kl = 0,$$

яки $$\sin\left(l\sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_z}}\right) = 0.$$

Бу тригонометрик тигезләмәнең чишелеше түбәндәгечә була:

$$l\sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_z}} = n\pi, \text{ биредә } n = 1,2,3,4,\ldots$$

Бу чишелеш $n = 0$ булганда да үтәлә, ләкин бу вакытта $P_{кр} = 0$ (тотрыклылык югалмый).

Ин кечкенә нульгә тигез булмаган $P = P_{кр}$ кыйммәтен $n = 1$ булганда табарга мөмкин. Ул вакытта:

$$l\sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_z}} = \pi.$$

Бу формуладан критик көчне табабыз:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}.$$

Бу формула Л е о н а р д Э й л е р тарафыннан чыгарылган. Шуңа күрә критик көч $P_{кр}$ шулай ук *Эйлер критик көче* дип атала. Әгәр кысучы көч критик көчтән кимрәк булса, тигезләнешнең турысызыклы рәвеше генә булуы мөмкин (бу очракта ул тотрыклы була).

Эйлер формуласыннан күрәбез: *критик көчнең зурлыгы, стерженьның катылыгына туры пропорциональ һәм озынлыгы квадратына кире пропорциональ.*

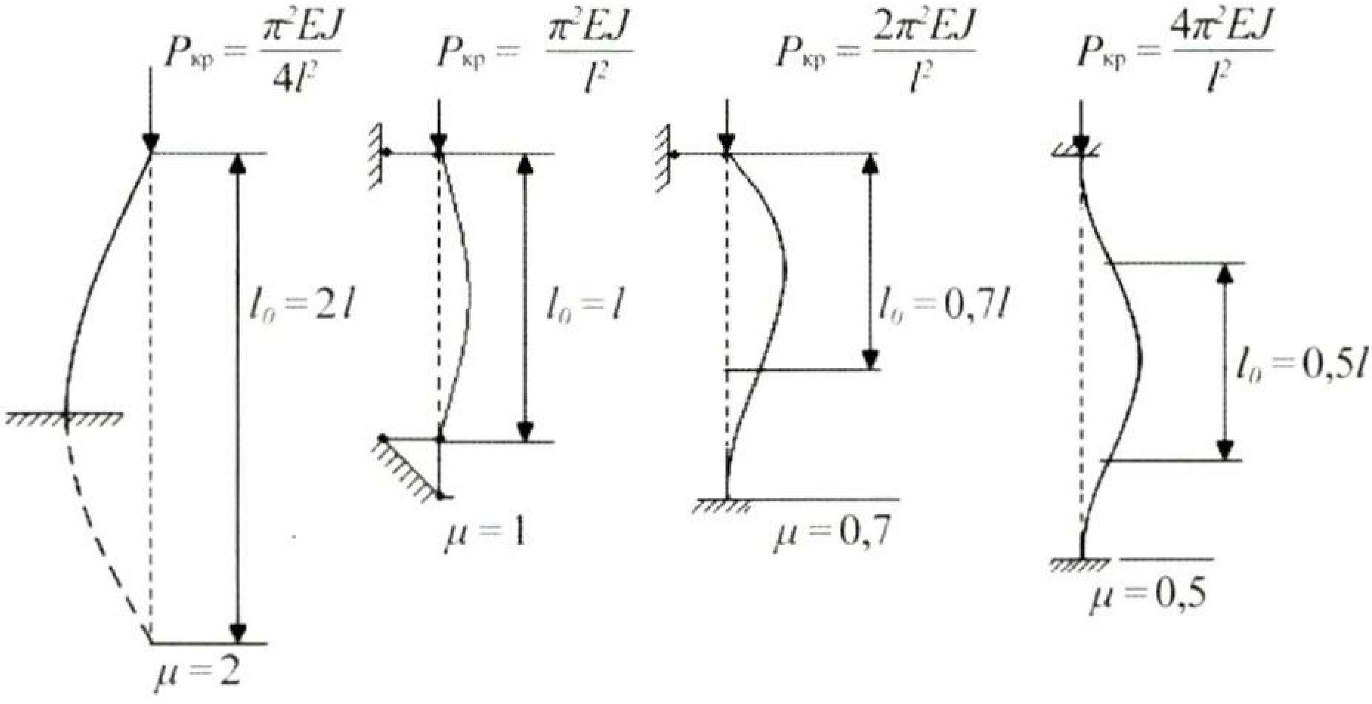
Эйлер формуласын чыгарганда, үзенең очларына шарнирлы таянган стержень синусоида буенча бөгелә икәнлеге ачыкланды, ә бөгелешләрнең санча кыйммәтен табарга мөмкин булмады, чөнки интеграллауның даими зурлыгының кыйммәте B ачыкланмаган килеш калды. Бу якынча дифференциаль тигезләмәсен куллану белән бәйле. Әгәр төгәл дифференциаль тигезләмә

$$\frac{y''}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}+k^2y=0$$

куллансак, $P > P_{кр}$ булганда стерженьның бөгелешләрен дә табарга мөмкин.

15.3. Стерженьны беркетү ысулларының критик көч зурлыгына тәэсире

Стерженны башкача беркетсәк (рәс. 52), мәсьәләне алда карап үткәнчә (п. 15.2) чишеп була: башта дифференциаль тигезләмә төзибез, аны чишеп, чик шартларыннан критик көчнең зурлыгын табабыз.



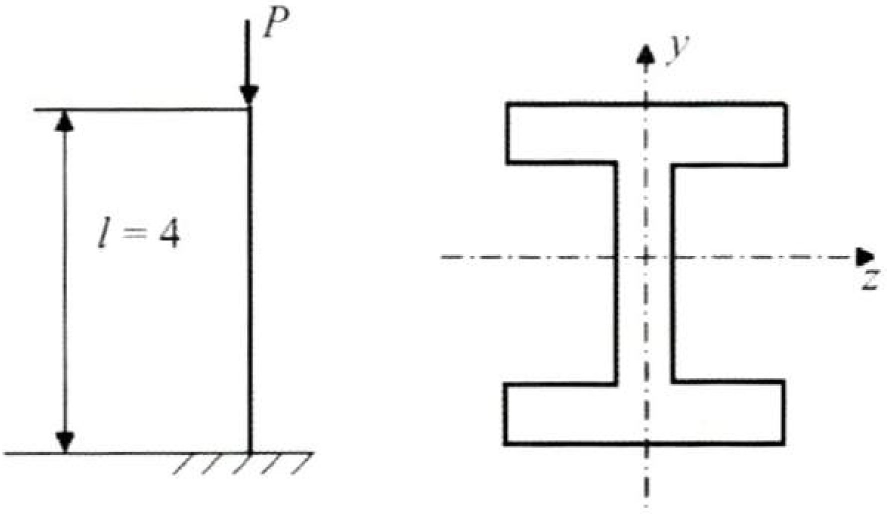
Рәс. 52

52 нче рәсемдә күрсәтелгән стерженьнарны беркетү ысуллары өчен гомумиләштерелгән Эйлер формуласы түбәндәге рәвештә була:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(\mu l)^2},$$

биредә μ — *китерелгән озынлык коэффициенты*, ә $l_0 = \mu l$ зурлыгы стерженьның *китерелгән озынлыгы* дип атала.

Китерелгән озынлык l_0 не шартлы рәвештә алынган, шундый ук критик көчкә ия булган, шарнирларга таянган стерженьның озынлыгы кебек аңларга мөмкин. l_0 озынлыгында синусоиданың ярымдулкыны урнаша.



Рәс. 53

Мәсәлән, бер очы белән каты беркетелгән стерженьны, очларына шарнирлы таянган стерженьның яртысы итеп карасак, $l_0 = 2l$ була, моннан μ = 2. Калган очраклар өчен дә шундый ук юл белән μ коэффициенты табыла.

Критик көч табу мәсьәләсен карап китик.

53 нче рәсемдә күрсәтелгән 22 нче номерлы икетаврлы стержень өчен $P_{кр}$ ны табарга .

Сортамент таблицасы буенча табабыз:

$$J_z = 2550см^4,\ J_y = 157см^4,\ A = 30{,}6\ см^2;\ l = 4м = 400см.$$

Эластиклык модуле $E = 2\cdot10^5$ Н/мм^2.

Исәпләү өчен коэффициент μ = *2* дип алабыз. Эйлер формуласы буенча исәплибез: $P_{кр} = \dfrac{(3{,}14)^2\cdot2\cdot10^5\cdot157\cdot10^4}{\left(2\cdot4\cdot10^3\right)^2} = 48373Н,$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{A} = \frac{48373}{306} = 158 \text{Н} / \text{мм}^2 .$$

16. Йөкләрнең динамик тәэсире

16.1. Гомуми мәгълүматлар

Моңа кадәр без тышкы көчләрнең статик рәвештә тәэсир иткән очракларын карадык. Ул вакытта корылма өлешләренең хәрәкәте тизләнешләре бик кечкенә һәм шуңа күрә аларны исәпкә алмаска да мөмкин иде.

Еш кына практикада инженерларга зурлыгын һәм торышын чагыштырмача тиз үзгәртә торган динамик йөк белән очрашырга туры килә. Шуңа күрә, исәпләүләр башкарганда, корылманың үзенең массасына һәм йөк массасына да бәйле булган инерция көчләрен исәпкә алырга кирәк.

Үз чиратында, инерция көчләре белән өстәмә көчәнешләр һәм деформацияләр бәйле. Кайбер вакытта бу өстәмә көчәнешләр бик зур һәм алар статик көчләрнең көчәнешеннән дә артып китәргә мөмкин.

Гомуми очракта динамик йөк корылмага һәрвакытта да исәпкә алып бетерергә мөмкин булмаган бик катлаулы тәэсир ясый.

Материал каршылыклары курсында гадәттә гади мәсьәләләр генә карала һәм, аларны чишкәндә, еш кына исәпләүне җиңеләйтүче ярдәмче гипотезалар кулланыла. Без түбәндәге мәсьәләләрне карау белән чикләнербез: йөкне күтәргәндә *тросны исәпләү; бәрелүне исәпләү.*

Практикада динамик йөкнең тәэсире динамик коэффициент ярдәмендә исәпкә алына. Мәсәлән, балканың статик рәвештә куелган көчен $P_{ст}$ дип алсак, ә динамик рәвештә куелган көчне $P_{д}$ дип алсак, аларның чагыштырмасы

$$\kappa_{д} = P_{д} / P_{ст}$$

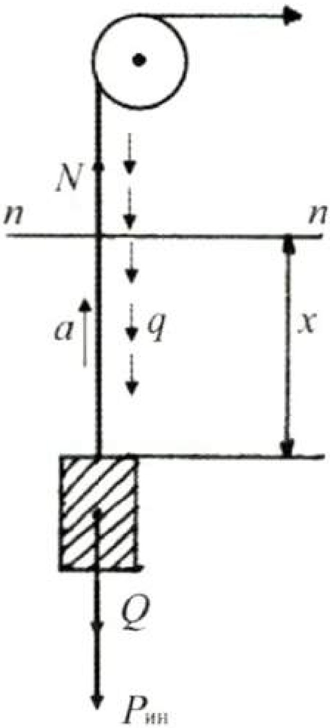
динамик коэффициент була.

Динамик коэффициент $\kappa_{д}$ ны күп очракларда аналитик рәвештә табалар, ә аналитик рәвештә табу кыен булган очракларда – эксперименталь юл белән.

Динамик коэффициент динамик йөкнең төренә, корылманың үлчәмнәренә, массасына, катылыгына һәм башка факторларга бәйле.

16.2. Тросны исәпләгәндә инерция көчләрен исәпкә алу

Авырлыгы Q булган йөкне a тизләнеше белән күтәргәндә, тросның ныклыгын исәпләүне карыйк (рәс. 54).



Рәс. 54

Әгәр йөк хәрәкәт итмәсә, тросның ирекле кисемендә йөкнең һәм тросның авырлыгыннан астан киселгән өлешенең тигезләнеше шартыннан табыла торган статик көч барлыкка килә:

$$N_{cm} = Q + qx,$$

биредә q — 1м тросның авырлыгы.

Йөкне a тизләнеше белән күтәргәндә, тросның кисемендәге көчәнешен табу өчен, йөкнең хәрәкәте тигезләмәсен язарга кирәк. Бу максатта материаллар каршылыгында теоретик механикадан билгеле булган Даламбер принцибын кулланалар.

Әгәр хәрәкәт итүче системаның һәр ноктасына өстәмә инерция көчләре куйсак, бу принцип буенча хәрәкәт итүче системаны тигезләнештә торучы дип карарга мөмкин.

Даламбер принцибы ярдәмендә теләсә нинди динамик мәсьәлә чишү өчен, статик (гадирәк) мәсьәлә китерелә (тигезләнеш тигезләмәсен төзергә). Безнең мәсьәләдә инерциянең суммар көче түбәндәгечә була:

$$P_{ин} = \frac{Q + qx}{g} a,$$

биредә g — тоткарсыз төшү тизләнеше.

Көчнең тулы кыйммәте түбәндәгечә табыла:

$$N_{д} = (Q + qx) + \frac{Q + qx}{g} a = (Q + qx)\left(1 + \frac{a}{g}\right) = к_{д} N_{ст},$$

биредә $\kappa_{\text{д}} = \left(1 + \dfrac{a}{g}\right)$ — динамик коэффициент, ә $N_{\text{ст}} = Q + qx$ борысны сузучы көч тизләнеше исәпкә алынмый.

Бу очракта динамик көчәнеш өчен ныклык исәпләү формуласы түбәндәгечә языла:

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{N_{\text{д}}}{A} = \frac{\kappa_{\text{д}} N_{\text{ст}}}{A} = \kappa_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}} \le \sigma_{\text{adm}} .$$

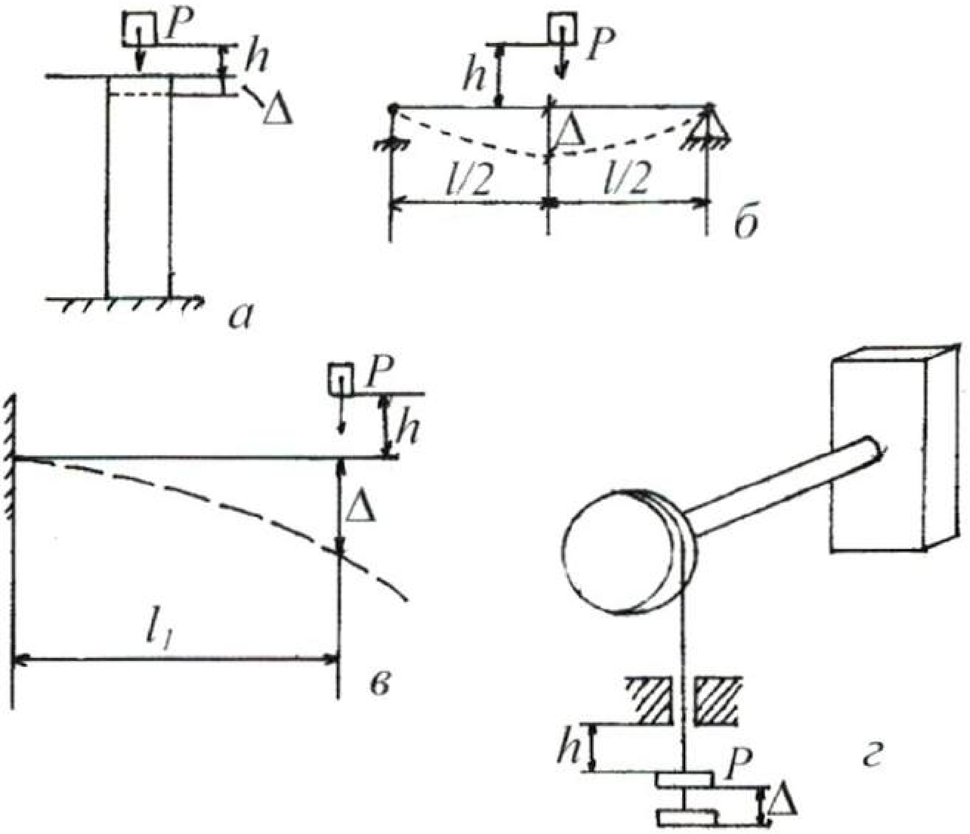
Бу формуладан күренгәнчә, динамик исәпләү статик исәпләүдән динамик коэффициент белән генә аерыла.

16.3. Бәрмә йөкләнеш*

Җисемгә бәргәннән соң аның күчү тизлеге ниндидер моментта нульгә тигез була. Бу моментта корылма элементының деформациясе һәм анда барлыкка килүче көчәнешләр үзләренең иң зур кыйммәтләрен алалар. Бу момент эчендә барлыкка килгән йөкләү очрагын *бәрмә йөкләнеш* дип атыйлар. Бәрмә йөкләнешне өйрәнгәндә, бәрелә торган җисем корылма элементыннан сикереп китми, ә аның белән бергә күчә дип алабыз. Бәрмә йөкләнеш нәтиҗәсендә системаның һәм йөкнең әкренләп сүнүче дулкыннары барлыкка килә, статик тигезләнеш торышы урнаша. Ул вакытта корылма элементының деформацияләре һәм көчәнешләре P йөгенең статик тәэсир итүе нәтиҗәсендә барлыкка килгән деформацияләргә һәм көчәнешләргә тигез.

* Биредә энергия балансын кулланып, бәрмә йөкләнешкә исәпләү карала.

Бәрмә йөкләнешкә дучар ителгән системада деформациянең күп төрләрен күрергә мөмкин: сузу, кысу (рәс. 55, а), бөгү (рәс. 55, б, в), бөтерү һәм бөгү (рәс. 55) һ.б.



Рәс. 55

Корылманы бәрмә йөкләнешкә тикшерүнең максаты булып бәрү нәтиҗәсендә барлыкка килгән иң зур деформацияләрне һәм көчәнешләрне ачыклау тора. Системада бәрмә йөкләнеш нәтиҗәсендә барлыкка килә торган көчәнешләр материалның эластиклык һәм пропорциональлек чиген узып китми дип исәплибез. Шуңа күрә, бәрмә йөкләнешне өйрәнгәндә, Гук законын кулланырга мөмкин.

Кысу очрагын карап китик (рәс. 55, а). Стерженьның озынлыгы l, аркылы кисеменең мәйданы A, материалның эластиклык модуле E. h биеклегеннән борысның иректе очына P авырлыгындагы йөк төшә.

Нәтиҗәдә стержень кыскара, аның динамик деформациясе $\Delta_д$ була. Иң түбән ноктада йөк туктый, димәк, аның кинетик энергиясе нульгә әверелә, йөкнең кинетик энергиясе тулысынча стерженьның потенциаль энергиясенә күчә:

$$K = U_д .$$

Кинетик энергия сан ягыннан башкарылган эш зурлыгына тигез:

$$K = A_{эш} = P(h + \Delta_д) .$$

Стерженьның потенциаль энергиясен табыйк. Гук законы бәрү вакытында да үтәлә дип исәпләп, потенциаль энергиянең аңлатмасын болай язарга була:

$$U_д = \frac{1}{2} P_д \Delta_д .$$

Гук законыннан

$$\Delta_д = \frac{P_д l}{EA}, \quad P_д = EA\frac{\Delta_д}{l},$$

шуңа күрә

$$U_д = \frac{EA}{2l}\Delta_д^2$$

U һәм K аңлатмаларын тигезләп, мондый тигезләмәгә киләбез:

$$P(h + \Delta_д) = \frac{EA}{2l}\Delta_д^2 .$$

$\dfrac{P\,l}{EA}$ ның $\Delta_{ст}$ икәнен исәпкә алып, бу тигезләмәне болай язарга була:

$$\Delta_д^2 - 2\Delta_{ст}(h + \Delta_д) = 0\,,$$

яки

$$\Delta_д^2 - 2\Delta_{ст}h + 2\Delta_{ст}\Delta_д = 0\,.$$

Квадрат тигезләмәгә килдек. Аның тамырлары түбәндәгегә тигез:

$$\Delta_д = \Delta_{ст} \pm \sqrt{\Delta_{ст}^2 + 2h\Delta_{ст}}\,.$$

Плюс тамгасын гына калдырып (безне абсолют кыйммәте иң зур булган деформация кызыксындыра), $\Delta_д$ аңлатмасын болай итеп язабыз:

$$\Delta_д = \Delta_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}\right).$$

Гук законы буенча көчәнеш деформациягә пропорциональ, шуңа күрә

$$\sigma_д = \sigma_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}\right).$$

Җәя эчендәге аңлатма динамик коэффициент булып тора:

$$\kappa_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}\,.$$

Бу аңлатманы башкача да язып була. Тамыр тамгасы астындагы чагыштырманың санаучысын һәм ваклаучысын P көче зурлыгына тапкырласак, $\kappa_д$ аңлатмасын болай күчереп язабыз:

$$\kappa_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2Ph}{P\Delta_{\text{ст}}}} \,,$$

биредә кергән Ph – йөкнең стержень белән бәрелешү моментындагы кинетик энергиясе (K_0), ә $\frac{P\Delta_{\text{ст}}}{2}$ — йөкнең җыелган потенциаль энергиясе ($U_{\text{ст}}$) була. Шулай итеп, $\kappa_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{\text{ст}}}}$.

Шулай итеп, динамик коэффициентны белгән очракта, кирәк булган башка барлык характеристикаларны да исәпләргә мөмкин:

$$\Delta_{\text{д}} = \kappa_{\text{д}} \Delta_{\text{ст}} \,, \qquad P_{\text{д}} = \kappa_{\text{д}} P_{\text{ст}} \,, \qquad \sigma_{\text{д}} = \kappa_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}} \,.$$

Динамик коэффициент табылгач, ныклык шартын болай итеп язарга була: $\sigma_{\text{д}} = \kappa_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}} \le \sigma_{\text{adm}}$.

Динамик коэффициентның аңлатмасына анализ ясыйк.

1. Йөк $h = 0$ биеклегеннән төшә, башкача әйткәндә, йөк бик тиз, кинәт куела. Бу очракта, $\kappa_{\text{д}} = 2$.

   Бер үк йөк бик тиз куелганда, статик куелгандагыга караганда, ике тапкырга зуррак көчәнеш һәм деформация барлыкка килә.

2. Йөк бик зур биеклектән төшә: $h >> \Delta_{\text{ст}}$. Бу очракта башта тамыр тамгасы астында торган берәмлекне $2h/\Delta_{\text{ст}}$ белән чагыштырганда кечкенә дип алып ташлыйбыз, аннары тамырның тышкы ягында торган берәмлекне дә алып ташлыйбыз.

Шулай итеп, $\kappa_{д} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{K_0}{U_{ст}}}$.

Бу формуланы $\Delta_{ст}$ урынына $\frac{Pl}{EA}$ ны куеп, үзгәртәбез:

$$\kappa_{д} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{2hEA}{Pl}} = \sqrt{\frac{2PhEAA}{PPlA}} = \frac{1}{\sigma_{ст}}\sqrt{\frac{2K_0E}{V}},$$

чөнки $Ph = K_0, lA = V$ — стерженьның күләме; $\sigma_{ст}$ ны тигезләмәнең сул ягына чыгарып, тигезләмәне болай язабыз:

$$\kappa_{д}\sigma_{ст} = \sigma_{д} = \sqrt{\frac{2K_0E}{V}}.$$

Бу очракта ныклык шарты мондый рәвештә була:

$$\sigma_{д} = \sqrt{\frac{2K_0E}{V}} \le \sigma_{adm}.$$

Шулай итеп, бик мөһим нәтиҗәгә ирештек: бәрмә йөкләнеш очрагында стерженьның киселмәдәге көчәнеш кисем мәйданына гына түгел, ә беренче чиратта борысның күләменә бәйле. Бәрмә йөкләнешле корылмаларны проектлаштырганда мондый мәсьәләләрне чишүгә бик зур әһәмият бирелергә тиеш.

17. Вакыт узу белән периодик үзгәрә торган йөкләнешкә материалларның каршылыгы

17.1. Арыганлык җимерелүе төшенчәсе һәм аның сәбәпләре

Вакыт узу белән үзгәрүче көчәнешләр тәэсирендә машинаның детальләре җимерелә башлый. Бу процесстагы иң зур көчәнеш шактый кечкенә булырга да мөмкин. Техника үсеше, тизйөрешле машиналар һәм механизмнар барлыкка килү белән вагон күчәрләренең һәм локомотив рессорларының, шатуннарның, кривошипларның, пружиналарның, турбина көрәкләренең һ.б. ватылулары күзәтелә башлый. Детальләрнең ватылуы машина яки механизмның озак эшләвеннән була. Кагыйдә буларак, детальләр пластик материаллардан ясалсалар да, алар уалып җимерелергә мөмкин. Түбәндәге нәтиҗәгә киләбез: вакыт узу белән алмаш көчәнешләр тәэсирендә материал үзгәрә, «арыган» кебек була, һәм пластик материал урынына уалучанга әверелә.

Материалларның арыганлыгы күптән инде фәнни тикшеренү эшләре алып баручыларның игътибарын җәлеп иткән. Ләкин җимерелүләрнең табигате барыбер ачыкланмаган килеш кала бирә. Моны болай аңлатып була.

Материалның структурасы бериш түгел (анда бөртекләр, микроскопик чатнаган урыннар һ.б. була). Шуның нәтиҗәсендә аерым нокталар тирәсендә материал киметелгән ныклыкка ия була.

Үзгәрешле, күп тапкыр кабатлана торган йөкләнешләр (циклик йөкләнешләр) тәэсир иткәндә, киметелгән ныклыкка ия булган нокталар тирәсендә микроскопик чатнаган урыннар барлыкка килә. Ярыкның төбендә, очлы киселешендәге кебек, көчәнешләрнең зур концентрациясе барлыкка килә, алар ярыкның зураюына китерә. Ул ярыкның зураюы нәтиҗәсе детальнең кисемен зәгыйфьләндерә һәм уалучан җимерелүгә китерә.

Алмаш көчәнешләр тәэсирендә зураеп килүче ярыкларның өслекләре күп тапкырлар бер-берсенә ышкылып шомаралар. Шуңа күрә сыну өслеге арыганлык җимерелүе вакытында ике өлештән тора: берсе металл өчен — гади бөртекле структуралы, ә икенчесе — шомарган өслек.

Кабатлана торган алмаш көчәнешләр (циклик көчәнешләр) тәэсир иткәндә, материалның эзлекле рәвештә формасы үзгәрүгә дучар булу процессы *материалның арыганлыгы* дип атала.

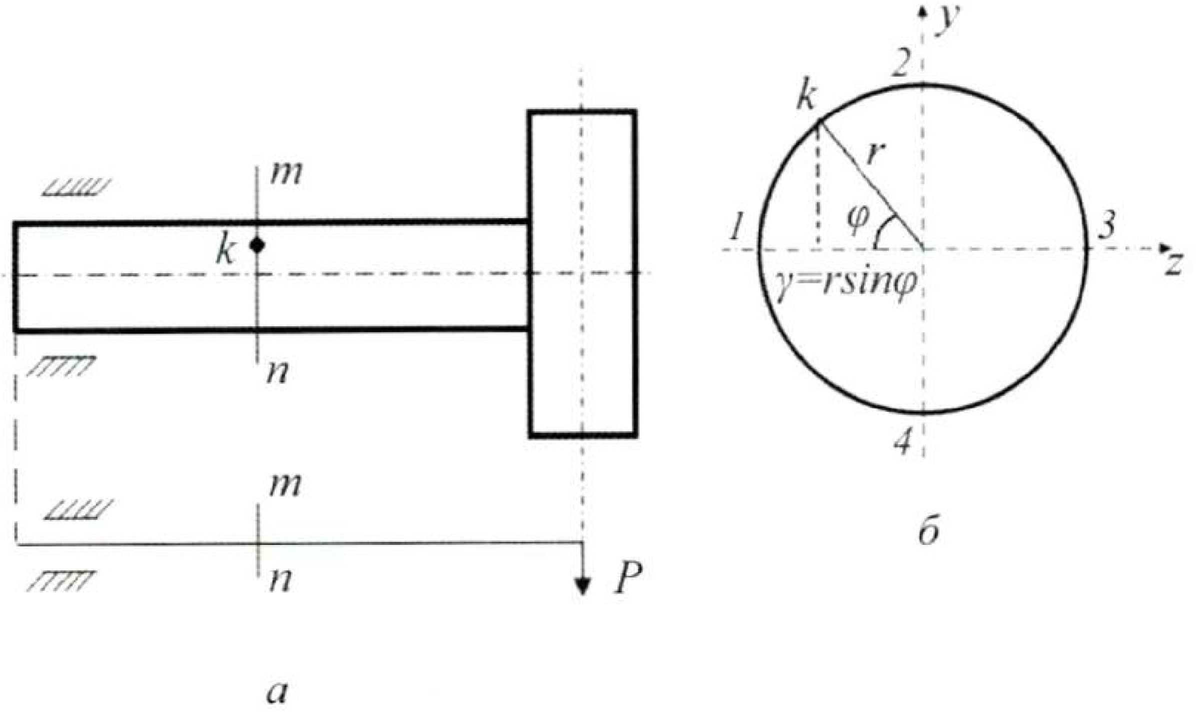
Материалның арыганлыкка каршы тору сәләте *дәвамлы чыдамлылык* дип атала.

Детальнең җимерелүе, металлның уалучан яки пластик булуына карамастан, һәрвакыт көтелмәгәндә килеп чыга.

17.2. Көчәнеш циклларының төрләре

Конструкция элементларында вакыт узу белән үзгәрә торган көчәнеш үзгәрешле зурлыкка яки юнәлешкә ия булган элементка карата күчүче йөкләнешләр нәтиҗәсендә барлыкка килә.

Әйләнә торган валның контурында урнашкан *k* ноктасындагы көчәнешне табу мисалын карап китик (рәс. 56, а).



Рәс. 56

Исәпләү схемасы 56 нчы *б* рәсемендә күрсәтелгән (валның *m–n* кисеме).

Теләсә нинди моментта, φ почмагына бәйле рәвештә *k* ноктасының координаты $y = r\sin\varphi$ тигезлеге буенча табыла, биредә *r* — валның радиусы.

m–n кисеменә бөгү моменты тәэсир итә, һәм шуның нәтиҗәсендә нормаль көчәнешләр барлыкка килә:

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z} = \frac{M_z r}{J_z}\sin\varphi \text{ яки } \sigma = \sigma_{\max}\sin\varphi .$$

Борылу почмагы φ нең әйләнүнең почмакча тизлеге ω га бәйлелеге

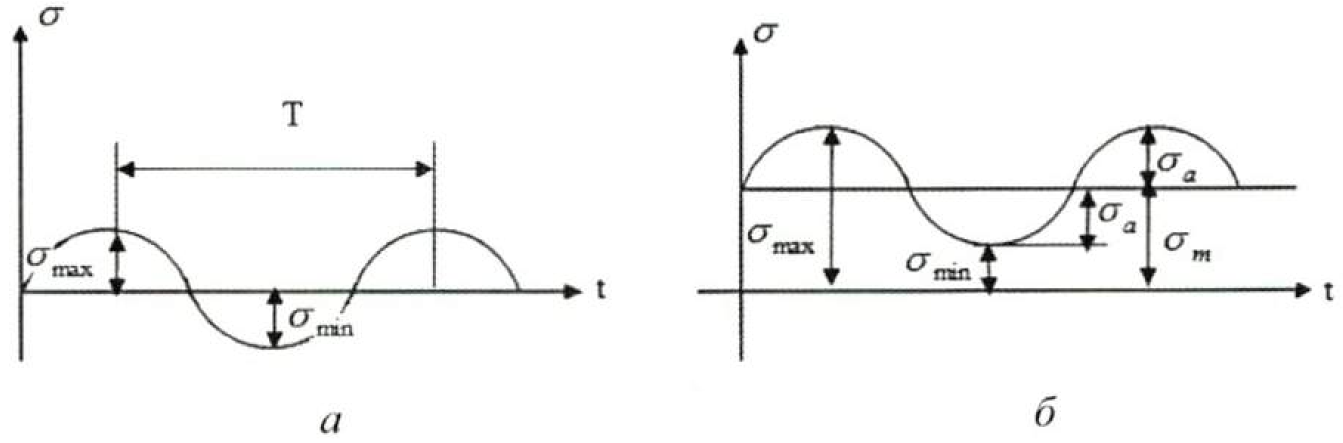
$$\varphi = \omega t$$

формуласы буенча табыла. Моннан

$$\sigma = \sigma_{\max} \sin \omega t \, .$$

Иң зур сузучы көчәнеш $\sigma_{\max}$, k ноктасы валда «2» торышын алган вакытта була (рәс. 56, *б*).

Валда k ноктасы «4» торышын алганда, анда иң зур кысучы көчәнеш була. Һәм k ноктасы нейтраль күчәргә эләккәндә («1» һәм «3» торышлары), көчәнеш нульгә тигез була ($\sigma = 0$).



Рәс. 57

57 нче *а* рәсемендә сурәтләнгән график $\sigma = \sigma_{\max} \sin(\omega t)$ тигезләмәсе буенча төзелгән. Күргәнебезчә, вакыт узу белән көчәнеш периодик рәвештә үзгәрә: билгеле бер вакыт аралыгында (T — период) алар бер үк кыйммәткә ия була; периодның башлангыч һәм ахыргы нокталарында көчәнешләрнең үзгәрү характеры бертөрле. Мәсәлән, алар $\sigma_{\max}$ нан $\sigma_{\min}$ га кадәр кими һәм аннан соң $\sigma_{\max}$ га кадәр үсәләр .

Көчәнешләрнең бер периодта үзгәрүе *көчәнешләр циклы* дип атала. Көчәнешләр үзгәрешенең төрле законнарына төрле цикллар туры килә. 57 нче *а* рәсемендә симметрик цикл төре күрсәтелгән ($\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$).

Симметрик циклда көчәнешләрнең максималь һәм минималь кыйммәтләре санча үзара тигез, ләкин тамгалары капма-каршы .

Әгәр әйләнүче валга даими зурлыктагы өстәмә буй сузылучы көч куелса,

$$\sigma = \sigma_{\max} \sin \omega t$$

көчәнешләренә циклның уртача даими

$$\sigma_m = N / A$$

көчәнешен өстәсәк, көчәнешләр 57 нче *б* рәсемендә сурәтләнгән закон буенча үзгәрер. Көчәнешләрнең бу рәвешле үзгәрү законы *асимметрик цикл* дип атала. Асимметрик циклда көчәнешләрнең максималь кыйммәтләре $\sigma_{\max}$, санча минималь кыйммәт $\sigma_{\min}$ га тигез түгел.

Әгәр максималь һәм минималь көчәнешләрнең тамгалары төрле булса, цикл *үзгәрмә тамгалы* дип атала. Әгәр максималь һәм минималь көчәнешләрнең тамгалары бертөрле булса, цикл *даими тамгалы* дип атала, $\sigma_{\max}$ яки $\sigma_{\min}$ нульгә тигез булган очракта, цикл *нульле цикл* дип атала.

57 нче *б* рәсеменнән мондый бәйлелекләрне язарга мөмкин:

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a, \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2},$$

$$\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a, \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2},$$

биредә σ_m — циклның уртача даими көчәнеше, σ_a — циклның амплитудасы (көчәнешләр циклының алмаш төзүчесенең иң зур кыйммәте).

Цикл асимметриясе коэффициенты түбәндәгегә тигез:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad \text{(симметрик цикл өчен } R = -1\text{)}.$$

Әгәр асимметрия коэффициенты бертөрле булса, цикллар *охшаш цикллар* дип атала.

17.3. Дәвамлы (озакка сузылган) чыдамлылык чиге турында төшенчә

Алмаш көчәнешләрнең барысы да арыганлык җимерелүе китереп чыгармый. Әгәр детальнең теге яки бу кисәгендә алмаш көчәнешләрнең характерлы зурлыклары үзләренең критик зурлыкларыннан артып китсә генә, *арыганлык* дип аталган *җимерелү* килеп чыгарга мөмкин.

Дәвамлы чыдамлылык чиге дип, максималь көчәнеш циклының иң зур кыйммәткә ия булган зурлыгы $\sigma_{\max}$ яки $|\sigma_{\min}|$ атала, биредә $|\sigma_{\max}| < |\sigma_{\min}|$ ул чиксез күп цикллар булганда, детальнең арыганлык җимерелүенә китерми.

Дәвамлы чыдамлылык чиге σ_R дип тамгалана, биредә R — циклның асимметрия коэффициенты (рәс. 58).

Рәс. 58

Симметрик циклда дәвамлы чыдамлылык чиге σ_{-1} белән, ә нульледә (пульсацияләүчедә) σ_0 дип тамгалана. Симметрик цикл очрагында, дәвамлы чыдамлылык чиген билгеләү өчен, махсус сынау машиналарын кулланалар.

Сынала торган материалдан ясалган үрнәкләр өчен, көчәнешләрнең төрле зурлыкларын куеп, үрнәкнең җимерелү халәтенә җиткерү өчен кирәк булган цикллар санын билгелиләр.

Тәҗрибә нәтиҗәләре буенча арыганлык кәкресен төзиләр, $\sigma_{max} = f(N)$, σ_{max} — циклның максималь көчәнеше, N — үрнәкнең җимерелүе өчен кирәк булган цикллар саны (рәс. 56).

Бу рәсемнән күренгәнчә, $\sigma_{max} = f(N)$ кәкресе асимптотик рәвештә турыга якыная. Мондый сынау вакытында бу кәкренең горизонталь асимптотасы дәвамлы чыдамлылык чигенә тигез була.

Тәҗрибәләр түбәндәгене күрсәтә: әгәр ясалган үрнәк 10^7 гә кадәр циклдан соң җимерелмәсә, ул зуррак сандагы циклдан соң да җимерелмәс. Мәсәлән, вагон Мәскәүдән Владивостокка кадәр хәрәкәт иткәндә, тимер юл вагонының күчәре $3 \cdot 10^6$ цикл кичерә.

17.4. Дәвамлы чыдамлылык чиге зурлыгына тәэсир итүче факторлар

Дәвамлы чыдамлылык чиге зурлыгына күп кенә факторлар тәэсир итә. Шулардан аеруча әһәмиятлеләрен карап китик.

1. Көчәнешләр концентрациясе.

Арыганлык ярыклары, кагыйдә буларак, көчәнешләр концентрациясе булган урыннарда барлыкка килә. Ул k_σ *эффектив концентрация коэффициенты* белән характерлана.

2. Деталь өслегенең сыйфаты.

Деталь өслеген эшкәртү сыйфаты тупасрак булган саен, дәвамлы чыдамлылык чигенең түбәнәюе көчлерәк була, шул ук вакытта ныклык чиге югары булган материаллар өчен бу түбәнәю сизелерлек дәрәҗәдә зур. Өслек эшкәртүенең тәэсире түбәндәгечә анлатыла: детальнең тупас өслеге көчәнеш концентрациясе өчен өстәмә урыннар барлыкка китерә, димәк кечкенә ярыклар барлыкка килү өчен уңай шартлар тудыра. Менә шуның өчен механизмнар һәм

машиналарның әһәмиятле детальләрен еш кына шомарталар. Әгәр өслекне махсус эшкәртсәк, детальнең дәвамлы чыдамлыгы арта. Өслекне эшкәртүнең берничә ысулы бар: *цементлау*, югары ешлыктагы токлар белән *чыныктыру*, зур басым астында ролик белән *тәгәрәтү* һ.б.

3. Детальнең абсолют үлчәмнәре.

Экспериментлар ярдәмендә ясалган үрнәкнең үлчәмнәре дәвамлы чыдамлылык чигенә нык тәэсир итүләре ачыкланган. Үлчәмнәрне арттырганда, дәвамлы чыдамлылык чиге кечерәя. Зур күләмле материалдан ясалган үрнәкләрдә дефектлы урыннар күбрәк (материалдагы бушлыклар, кечкенә ярыклар, металлик булмаган тоташтыру, өслекне эшкәртү эзләре), алар дәвамлы чыдамлылык чиген киметәләр, ә кечкенәрәк күләмле үрнәкләрдә дефектлы урыннар азрак. Шуңа күрә дәвамлы чыдамлылык чиге дә зуррак була.

4. Тышкы әйләнә-тирә.

Детальнең дәвамлы чыдамлылыгы әйләнә-тирәгә дә бәйле. Югары температура дәвамлы чыдамлылыкны түбәнәйтә. Түбән температурада металлның бәрелү уалучанлыгы көчәя. Коррозиядән саклау дәвамлы чыдамлылыкны арттыра (буяу, цинклау, азотлау, цементлау һ.б.).

Татарча-русча атамалар сүзлекчәсе

Авыш терәк — подкос, укосина, подпорка

Аерым чыгарылма — частная производная

Аныклык — определенность

Арата — брус

Араталык — поперечина

Артыш, үсеш, үсемтә — приращение

Аңлатма, билгеләмә — выражение, определение

Басым — давление

Баш вектор — главный вектор

Баш момент — главный момент

Бердәй — одинаковый, тождественный

Бердәй тәэсир итүче көч — равнодействующая сила

Бердәнбер — единственный

Бериш — однородный

Берәмлек вектор — единичный вектор, орт

Билгеләү — определить

Бораy — винт, сверло

Борыс — балка

Буын — член

Бәбкә — стропилина

Бәйләнеш реакциясе — реакция связи

Бәйләнешләр — связи, отношения

Бәя кую, бәяләү — оценить

Вертикаль, асма — вертикаль

Гамәл — действие

Гамәли механика — прикладная механика

Дивар, стена — стена

Дифференциал табу, дифференциаллау — дифференцирование

Даимиләр — постоянные

Егәрлек — мощность

Ешлык — частота

Зарурлык (кирәклек) — необходимость

Ирекле җисем — свободное тело

Ирекле лек дәрәҗәсе — степень свободы

Инсә — плечо

Йөк — груз

Йөреш хәрәкәте — поступательное движение

Калып, матрица — матрица

Канун, закон — закон

Каршылама — противовес

Каршылык — сопротивление

Катлаулы хәрәкәт — сложное движение

Каты җисем — твердое тело

Кендек (тех.) — стержень, шкворень

Киеренкелек, тыгызлык — плотность

Киләсе, түбәндәге, алдагы — следующее

Кисемтә — отрезок

Колаксалы, чыгынтылы — консольный

Кран сузылышы (көянтәсенең колачы) — вылет стрелы крана

Кыйммәт, мәгънә — значение

Кыл — струна

Кыр — поле

Кыршау — обруч

Кәкре — кривая

Көчләр пары — пара сил

Күздә тотыла, фараз ителә — предполагается

Күчеш — перемещение

Күчергеч — привод

Күчәр — ось

Материал — материал

Мәҗбүри тирбәлү — вынужденное колебание

Нокта — точка

Норма, күләм — норма

Орынма — касательная

Пешкәк — поршень

Раслау — утверждение

Силә, пружина — пружина

Стержень — стержень

Сүрелү — затухание

Тайпылыш, тайпылу — возмущение

Тайпылышсыз — невозмущенное

Тиңдәшлек, туры килү, ярашканлык — соответствие

Тапшыргыч чагыштырмасы — передаточное отношение.

Таркалган көчләр — распределенные силы

Тарту — тяга

Таяныч, күгән — опора

Терәк — опора

Тигезлек, тигезләмә — равенство

Тигезләмә — уравнение

Тизләнеш — ускорение

Тигезләнеш хәле — равновесие

Тигезсезлек — неравенство

Тизлек — скорость

Тикторыш халәте — состояние покоя

Тирбәнү — колебание

Тирәлек — среда

Тискәре — отрицательное

Тиңдәш — эквивалент

Тотрыклылык — устойчивость

Тупса, күгән — шарнир

Турысызыклы хәрәкәт — прямолинейное движение

Тәгәрәү — качение

Тәлинкә, түгәрәк — диск

Тәртип, рәт — порядок

Төр — род

Уйланма сан — мнимое число

Фаза — фаза

Фараз итү, рөхсәт итү — предполагать, допускать

Фәза — пространство

Чагылыш, тәгъбир, аңлатма — выражение

Чагыр — лебёдка, ворот

Читкә чыгу, тайпылу, тайпылыш — отклонение

Чын (реаль) сан — действительное число

Чыгарылма — производная

Шарт — условие

Шума — скользящий

Ысул — способ

Ышкылу — трение

Эш — работа

Яссылык — плоскость

Әйләнмә хәрәкәт — вращательное движение

Әйләнә — окружность

Өслек — поверхность

Үзгәрешле — переменная

Өрлек, матча — балка

Өслек — поверхность

Үзгәрешсез — стационар (реоном)

Үлчәү — весы

Җисем — тело

Җөплелек — чётность

Файдаланылган әдәбият

1. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. — М.: Издательство «Наука», 1976. — 600 с.
2. *Буланов Э.А.* Решение задач по сопротивлению материалов. — 2-изд., — М.: БИОНОМ. Лаборатория знаний, 2005.— 207 с.
3. *Вәлиуллин А.Х.* Гамәли механика. — Казан университеты нәшрияты, 1992. — 304 б.
4. *Кочетов В.Т., Кочетов М.В., Павленко А.Д.* Сопротивление материалов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 544 с.
5. *Сапрыкин В.И.* Техническая механика. Учебник. 3-изд., испр. — М.: Эксмо, 2007. – 560 с.
6. *Сёмин М.И.*Основы сопротивления материалов: учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС, 2004. — 255 с.

ЭЧТӘЛЕК

Кереш . . . 3

1. Реаль объект һәм аның исәпләү схемасы . . . 4

1.1 Төп төшенчәләр һәм гипотезалар . . . 5

2. Эчке көчләр . . . 7

2.1. Кисем методы . . . 8

2.2. Эчке көч эпюралары . . . 9

2.3. Буй көч эпюралары . . . 11

2.4. Бөтерү моменты эпюралары . . . 12

2.5. Аркылы көчләрнең һәм бөгү моментларының эпюралары . . . 13

3. Кисемдәге көчәнешләр. Деформацияләр . . . 15

3.1. Көчәнешләр . . . 15

3.2. Рөхсәт ителгән көчәнеш. Ныклык запасы . . . 17

3.3. Сузылу (кысылу). Көчәнешне билгеләү . . . 17

3.4. Сузылу очрагындагы деформацияләр. Гук законы . . . 19

3.5. Деформациянең потенциаль энергиясе . . . 22

4. Көчәнешнең концентрациясе . . . 24

5. Сузылуга (кысылуга) эшли торган статик билгеләнмәүче системалар . . . 27

6. Көчәнешле һәм деформацияле халәтләр теориясе . . . 30

6.1. Ноктадагы көчәнешле халәт турында төшенчә . . . 30

6.2. Төп мәйданчыклар һәм көчәнешләр. Көчәнешле халәт төрләре . 31

6.3. Сызыкча көчәнешле халәт . . . 33

6.4. Яссы көчәнешле халәт. Авыш кисемдәге көчәнешләр . . . 35

6.5. Экстремаль нормаль көчәнешләр . . . 38

6.6. Шудырып күчерү мәйданчыклары. Экстремаль орынма көчәнешләр . . . 39

6.7. Гомумиләштерелгән Гук законы . . . 41

6.8. Катлаулы көчәнешле халәтнең потенциаль энергиясе . . . 44

7. Ныклыкның теорияләре . . . 44

7.1. Төп аңлатмалар . . . 44

7.2. Ныклыкның классик теорияләре . . . 46

7.3. Ныклыкның энергетик теориясе 49
8. Шуышу деформациясе 51
8.1. Чиста шуышу турында төшенчә 51
8.2. Саф шуышу очрагында Гук законы 53
8.3. Шуышуда катнашучы тоташмаларны практик исәпләү 54
9. Яссы кисемнәрнең геометрик характеристикалары 57
9.1. Яссы кисемнәрнең статик моментлары 57
9.2. Яссы кисемнәрнең инерция моментлары 59
9.3. Гади фигураларның инерция моментлары 60
9.4. Инерция радиуслары 63
10. Түгәрәк аркылы кисемле стерженьны бөтерү 63
10.1. Аркылы кисеме түгәрәк булган стерженьны бөтергәндә көчәнешләр һәм деформацияләр 64
10.2. Аркылы кисеме түгәрәк булган борысны бөтергәндә, аның ныклыгын һәм катылыгын исәпләү 70
10.3. Бөтерү деформациясенең потенциаль энергиясе 72
10.4. Винтсыман пружиналарны исәпләү 73
11. Яссы бөгү 75
11.1. Саф бөгү. Нормаль көчәнешләрне билгеләү 76
11.2. Саф бөгү очрагында ныклыкны исәпләү 82
12. Тигез каршылыклы балкалар 84
13. Бөгелү күчешләре 86
13.1. Төп аңлатмалар 86
13.2. Балканың бөгелгән буй күчәренең дифференциаль тигезләмәсе. Турыдан-туры интеграллау методы 88
14. Катлаулы каршылык 97
14.1. Кыек бөгү 98
14.2. Бер үк вакытта тәэсир итүче бөгүче һәм буй көчләр 100
14.3.Үзәк аша узмый торган сузу һәм кысу 101
14.4. Түгәрәк аркылы кисемле борысларны бөтерү һәм бөгү 102
14.5. Бөгү һәм бөтерү очрагында көчәнешне билгеләү һәм ныклыкны тикшерү 105

15. Буйга кысылган стерженьның тотрыклылыгы 112
15.1.Тигезләнешнең тотрыклы һәм тотрыксыз формалары турында төшенчә 112
15.2. Буй бөгелеш. Эйлер формуласын чыгару 115
15.3. Стерженьны беркетү ысулларының критик көч зурлыгына тәэсире 118
16. Йөкләрнең динамик тәэсире 121
16.1. Гомуми мәгълүматлар 121
16.2. Тросны исәпләгәндә, инерция көчләрен исәпкә алу 122
16.3. Бәрмә йөкләнеш 124
17. Вакыт узу белән периодик үзгәрә торган йөкләнешкә материалларның каршылыгы 130
17.1. Арыганлык җимерелүе төшенчәсе һәм аның сәбәпләре 130
17.2. Көчәнеш циклларының төрләре 131
17.3. Дәвамлы (озакка сузылган) чыдамлылык чиге турында төшенчә 135
17.4. Дәвамлы чыдамлылык чиге зурлыгына тәэсир итүче факторлар 137

Кушымта 139
Файдаланылган әдәбият 144

ISBN 978-5-906894-24-3

Учебное издание

Тимербаев Раис Мингалиевич
Шамсетдинов Фаизрахман Ахметсалимович
Ахметов Линар Гимазетдинович

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие для высших
и средних специальных учебных заведений

Казань. Издательство «Магариф — Вакыт». 2016

На татарском языке

Уку-укыту басмасы

Тимербаев Рәис Мингалиевич
Шәмсетдинов Фәизрахман Әхмәтсәлимович
Әхмәтов Линар Гимазетдинович

МАТЕРИАЛЛАР КАРШЫЛЫГЫ

Югары һәм урта махсус уку йортлары өчен
уку ярдәмлеге

Редакторы *Л.Х. Кәлимуллина*
Компьютерда биткә салучы *Ф.К. Гомәрова*
Корректоры *Н.К. Нотфуллина*

Оригинал-макеттан басарга кул куелды 01.12.2016.
Форматы $60 \times 84^1/_{16}$. Офсет кәгазе. «Таймс» гарнитурасы.
Офсет басма. Басма табагы 9,25. Тиражы 500 д. Заказ М-3371.

«Мәгариф — Вакыт» нәшрияты http: magarif-vakyt.ru,
e-mail: valeevmx@mail.ru

«Идел-Пресс» полиграфия-нәшрият комплексы
«ТАТМЕДИА» АҖ филиалы типографиясендә электрон
макет сыйфатына тәңгәл итеп басылды.

420066, Казан шәһәре, Декабристлар урамы, 2.
e-mail: id-press@yandex.ru

«МӘГАРИФ – ВАКЫТ» НӘШРИЯТЫ